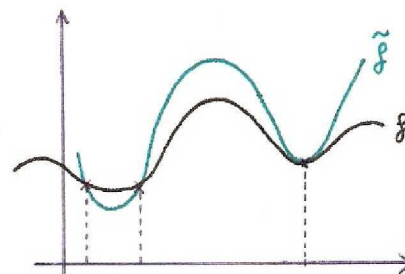


## TEMA 2: INTERPOLACIÓN.

### 1. INTRODUCCIÓN.

Interpolación es una forma de aproximar funciones.

Se extraen una serie de datos de la función (por ejemplo, puntos por los que pasa, máximos, mínimos...) y se trata de buscar otra función que coincida con ella en esos puntos.



¿Por qué se interpola?

- \* Porque la función a estudiar es muy compleja.
- \* Porque la función a estudiar es desconocida y sólo se conocen algunos datos.

Hay muchos tipos de interpolaciones. De momento nos centraremos en la Interpolación Polinomial, pero no debemos olvidar que hay muchos otros tipos.

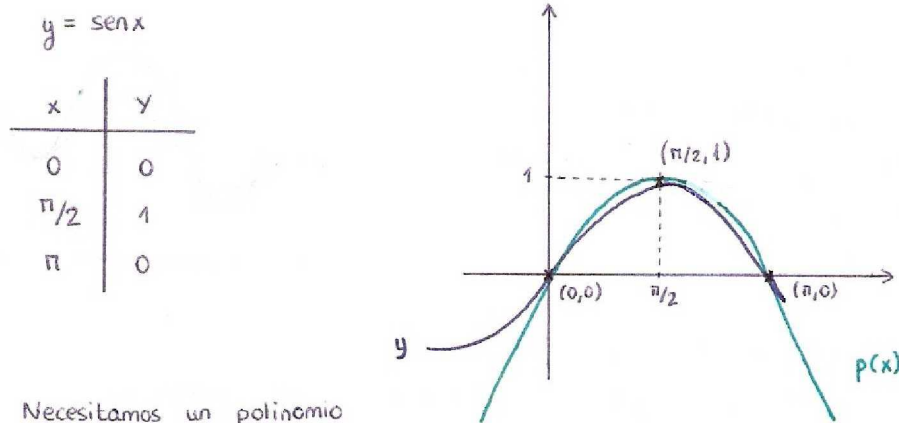
Interpolación Polinomial { - CLÁSICA (Polinomios de Lagrange, Bases de Lagrange).  
- OTRAS.



Hay otro concepto llamado también "bases de Lagrange" que no tienen nada que ver con esto que vamos a tratar.

Vamos a ver algunos ejemplos de interpolaciones.

\* **INTERPOLACIÓN POLINOMIAL CLÁSICA**: Es la más conocida. Nos dan una serie de puntos de la gráfica y nos piden hallar un polinomio que pase por esos puntos, y así aproxime la gráfica.



Necesitamos un polinomio que pase por estos puntos... Parece por la figura que será una parábola.

ECUACIÓN GENERAL DEL  
POLINOMIO:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

Como tenemos 3 condiciones (3 datos), el polinomio en este caso será, como mucho, de grado 2 porque podemos aspirar a resolver 3 coeficientes.

← Será menor si  
algún coeficiente  $\neq a_0$   
es igual a 0.

EL NÚMERO DE COEFICIENTES QUE  
PODEMOS RESOLVER VIENE DETERMINADO POR  
EL NÚMERO DE DATOS QUE NOS DAN.

**HALLAR EL POLINOMIO  $\equiv$  CALCULAR LOS COEFICIENTES.**

El polinomio sería :  $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Imponemos las condiciones:

$$p(0) = 0 \quad ; \quad p(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 = 0$$

$$p\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad ; \quad p\left(\frac{\pi}{2}\right) = a_0 + a_1 \cdot \frac{\pi}{2} + a_2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$$

$$p(\pi) = 0 \quad ; \quad p(\pi) = a_0 + a_1 \cdot \pi + a_2 \cdot \pi^2 = 0$$

Determinamos  
los coeficientes

$$\begin{aligned} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 \cdot \frac{\pi}{2} + a_2 \cdot \frac{\pi^2}{4} = 1 \\ a_0 + a_1 \cdot \pi + a_2 \cdot \pi^2 = 0 \end{array} \right. & \quad \left\{ \begin{array}{l} 2a_1 \pi + a_2 \pi^2 = 4 \\ a_1 \pi + a_2 \pi^2 = 0 \\ \hline a_1 \pi \quad \quad \quad / \quad = 4 \end{array} \right. \\ & \quad \quad \quad a_1 \pi + a_2 \pi^2 = 0 \quad ; \quad a_2 = -\frac{a_1}{\pi} \quad ; \quad a_2 = -\frac{4}{\pi^2} \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{4}{\pi}$$

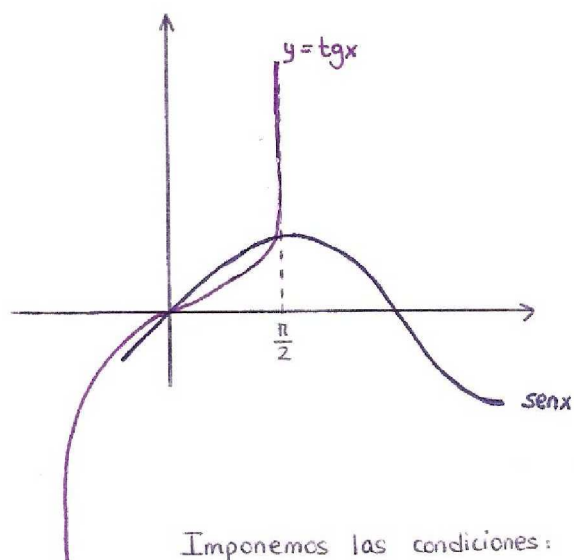
Por lo tanto, el polinomio que buscábamos es:

$$p(x) = \frac{4}{\pi} x - \frac{4}{\pi^2} x^2 = \frac{4}{\pi} \left( x - \frac{x^2}{\pi} \right)$$

↓  
Este es el polinomio hallado por Interpolación P. Clásica.  
Ahora podemos comprobar que sea correcto (evaluarlo en los puntos que nos daban).

\* **INTERPOLACIÓN POLINOMIAL NO CLÁSICA:** Es polinomial porque buscamos un polinomio, pero no es clásica porque los datos proporcionados no son la imagen de la función en determinados puntos, como ocurría en el caso anterior. Ahora tenemos la misma función ( $y = \sin x$ ) y los siguientes datos:

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Podemos aspirar a resolver 3 coeficientes.} \\ \text{El polinomio será, como mucho, de 2º grado.} \end{array}$$



El polinomio es:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Lo derivamos:

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x$$

Imponemos las condiciones:

$$f(0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$$

$$f'(0) = 1 \rightarrow a_1 = 1$$

$$f(\pi/2) = 1 \rightarrow a_0 + a_1 \frac{\pi}{2} + a_2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$$

Calculamos los  
coeficientes

$$\rightarrow a_0 + a_1 \frac{\pi}{2} + a_2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{\pi}{2} + a_2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 ; a_2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{2} ;$$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1 - \pi/2}{(\pi/2)^2}$$

Una vez hallados los coeficientes, ya tenemos el polinomio que buscábamos:

$$p(x) = x + \frac{1 - \pi/2}{(\pi/2)^2} \cdot x^2$$



\* INTERPOLACIÓN POLINOMIAL DE HERMITE: Consiste también en buscar un polinomio que se adapte a unos datos, que serán siempre de la forma:

$x_0 \dots x_n$  (Puntos)

$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$  (Imagen de los puntos)  $\rightarrow n+1$  datos  
 $f'(x_0), f'(x_1), \dots, f'(x_n)$  (Derivada en los puntos)  $\rightarrow n+1$  datos

2n+2 datos

Tendremos  $2n+2$  condiciones y por ello podremos resolver  $2n+2$  coeficientes:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{Polinomio} &\rightarrow p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n+1}x^{2n+1} \\
 \text{Derivo} &\rightarrow p'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + (2n+1)a_{2n+1}x^{2n}
 \end{aligned} \right\}$$

Se imponen las condiciones y se resuelve el sistema correspondiente. Así se obtiene el valor de los coeficientes  $a_i$  y se encuentra el polinomio.

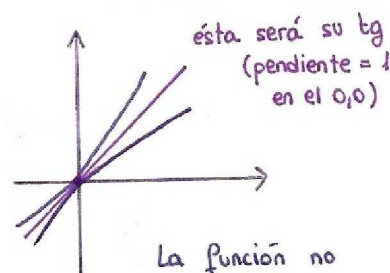
\* INTERPOLACIÓN POLINOMIAL DE TAYLOR: Para un punto  $x_0$  se conoce el valor de la función  $f(x_0)$  y sus sucesivas derivadas en el punto  $x_0$ . En este tipo de interpolación desconozco mucho de la gráfica, pero tengo mucha información sobre un punto ( $x_0$ ).

$y = \sin x \quad x_0 = 0$

$$\left. \begin{aligned}
 (x=0) &\longrightarrow y(0) = 0 \\
 (y' = \cos x) &\longrightarrow y'(0) = 1 \\
 (y'' = -\sin x) &\longrightarrow y''(0) = 0 \\
 (y''' = -\cos x) &\longrightarrow y'''(0) = -1
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 &\text{Imponemos condiciones sobre} \\
 &\text{la derivada en el punto 0.} \\
 &(\text{Ya veremos cómo se resuelve})
 \end{aligned}$$

LAS DERIVADAS NOS DAN INFORMACIÓN:

$y' \rightarrow$  Máximos, mínimos  
 $y'' \rightarrow$  Curvatura: concavidad, convexidad  
 $y''' \rightarrow$  Puntos de inflexión, crecimiento



La función no sabemos si está por arriba o por abajo.

\* OTROS TIPOS DE INTERPOLACIÓN: Existen otros tipos de interpolación que no son polinomiales porque no buscan aproximar la función mediante un polinomio.

Tenemos una serie de datos obtenidos de forma experimental:

$$\begin{array}{cc} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n+1 \text{ datos}}$

Buscamos una función de este tipo:

$$y(x) = \sum_{j=0}^n a_j e^{jx}$$

$$p(x) = a_0 + a_1 e^x + a_2 e^{2x} + \dots + a_n e^{nx}$$

Podemos hallar  $n+1$  coeficientes. Por tanto,  $j=0 \dots n$

## 2. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL CLÁSICA.

= INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE.

En este tipo de interpolación nos dan una serie de puntos:

$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} = S \rightarrow$  Estos puntos forman el SOPORTE DE INTERPOLACIÓN.

Conocemos el valor de  $f(x)$  en dichos puntos (la tabla de valores es lo único que sabemos de  $f(x)$ ). Queremos hallar el polinomio  $p(x)$  que coincida con la función en esos puntos.

Valores de  $f(x)$  en  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \rightarrow$  Tenemos  $n+1$  datos (podemos poner  $n+1$  condiciones).

Podemos aspirar a resolver  $n+1$  coeficientes, y ello implica que el polinomio será, como mucho, de grado  $n$ :

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathcal{P}_n$$

$\mathcal{P}_n \equiv$  ESPACIO VECTORIAL DE LOS POLINOMIOS  
DE GRADO  $\leq n$ .  $\dim \mathcal{P}_n = n+1$

Nº CONDICIONES =  
DIMENSIÓN DEL ESPACIO.

$\rightarrow$  Para que exista solución única

$p_n$  es combinación lineal de  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$   
 es decir, es combinación lineal de  $n+1$  polinomios.  
 POR ESO LA DIMENSIÓN ES  $n+1$ .

Ahora nos preguntamos ... ¿Existe ese  $p_n$  que cumpla todas las condiciones? Y si existe ... ¿Es único?

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \rightarrow \text{Lo hago coincidir con el} \\ &\quad \text{dato } y_0, \text{ que es la imagen} \\ p_n(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \quad \text{de la función en ese punto: } f(x_0) \\ &\quad \vdots \\ p_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{aligned}$$

Estamos buscando resolver los coeficientes. Construyo el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} p_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ p_n(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ &\vdots \\ p_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Sistema con } n+1 \text{ incógnitas } (a_0, \dots, a_n) \\ &\text{y } n+1 \text{ ecuaciones. Además, el} \\ &\text{sistema es lineal en esas incógnitas.} \end{aligned}$$

Vamos a resolver el sistema:

$$\begin{aligned} \exists \text{ los } a_i &\rightarrow \exists p_n \quad (\text{Hay solución}) \\ \nexists \text{ los } a_i &\rightarrow \nexists p_n \quad (\text{No hay solución}) \end{aligned}$$

¿Qué significa que una función  $g(x)$  sea LINEAL en los parámetros  $c_i$ ?

$$g(x; c_1, c_2, \dots, c_n)$$

- 1)  $g(x, c_1 + c_2) = g(x, c_1) + g(x, c_2)$
- 2)  $g(x, ac) = a \cdot g(x, c)$

Vamos a fijarnos en el DETERMINANTE:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \rightarrow \text{Determinante de Van der Monde.}$$

Puede suceder que:

a)  $\Delta \neq 0$

b)  $\Delta = 0$

a)  $\Delta \neq 0$   $\rightarrow$  Implica que existe una única solución  $(a_0, \dots, a_n)$  y esto implica que existe el polinomio:  $p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$

EXISTE SOLUCIÓN Y ES ÚNICA

b)  $\Delta = 0$   $\rightarrow$  O bien no hay solución, o hay  $\infty$  soluciones.

\* NO HAY SOLUCIÓN  $\Rightarrow$  Rango de la matriz ampliada  $= n+1$   
( $R_g A \neq R_g \bar{A}$ )  $\Rightarrow$  SISTEMA INCOMPATIBLE  
Hay 2 ecuaciones contradictorias  $\Leftarrow$

\* HAY INFINITAS SOLUCIONES  $\Rightarrow$  ( $R_g A = R_g \bar{A}$ )  $\Rightarrow$  SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO  
Hay 2 ecs. proporcionales  $\Leftarrow$

LO QUE NOS INTERESA ES QUE SEA ÚNICA. ¿Cómo podemos garantizar que  $\Delta \neq 0$ ?

El determinante de Van der Monde se puede escribir de la forma:

$$\Delta = \prod_{\substack{i > j \\ i=0}}^n (x_i - x_j)$$

$\rightarrow$  Demostración a continuación ...



$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} f_2 = f_2 - f_1 \\ f_3 = f_3 - f_1 \\ \vdots \end{matrix}]{\begin{matrix} f_2 = f_2 - f_1 \\ f_3 = f_3 - f_1 \\ \vdots \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \dots & x_1^n - x_0^n \\ 0 & x_2 - x_0 & x_2^2 - x_0^2 & \dots & x_2^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \dots & x_n^n - x_0^n \end{vmatrix} \rightarrow$$

--- Saca factor común  $\rightarrow (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \dots (x_n - x_0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 + x_0 & x_1^2 + x_1 x_0 + x_0^2 & \dots \\ 1 & x_2 + x_0 & x_2^2 + x_2 x_0 + x_0^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & x_n + x_0 & x_n^2 + x_n x_0 + x_0^2 & \dots \end{vmatrix} \rightarrow$$

--- Después de varios cambios  
vemos que su valor es...

$$\Delta = \prod_{\substack{i > j \\ i=0}}^n (x_i - x_j)$$

$\Rightarrow$  Implica que  
 $\Delta = 0 \Leftrightarrow \exists i, j / x_i = x_j$

\*  $x_i \neq x_j \quad \forall i, j \Rightarrow \Delta \neq 0 \Rightarrow$  Solución única.

\*  $x_i = x_j \quad \exists i, j \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{a) } y_i \neq y_j \Rightarrow \text{S. INCOMPATIBLE} \\ \quad (\nexists \text{ solución}) \\ \text{b) } y_i = y_j \Rightarrow \text{S. COMPATIBLE} \\ \quad \text{INDETERMINADO } (\infty \text{ sol.}) \\ \quad (\text{Sobran ecuaciones}). \end{cases}$

$\rightarrow$  En el soporte de interpolación que nos dan  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  si no se repite ningún elemento, entonces  $\Delta \neq 0$  y ya sé que  $\exists$  una única solución. Si alguno se repite, dependerá de si sus imágenes son iguales también o no.

\* PROBLEMA 1 (TEMA INTERPOLACIÓN)

Sea  $U$  el espacio vectorial de funciones generado por  $\{1, e^x, e^{-x}\}$

- (a) Estudiar la existencia y unicidad de la solución del problema de hallar  $u(x) \in U$  que interpole en el sentido de Taylor a una función  $f(x) \in C^2$  en el punto  $x_0$ . Esto es,  $u^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$   $i = 0, 1, 2$ .

( $\exists$   $g', g''$  continuas en  $x = x_0$ )  $\longleftarrow$

Queremos hallar una función  $u(x)$  que coincida en  $x_0$  con la función que queremos interpolar:  $f(x)$   
 $u(x)$  será combinación lineal de los elementos que generan el espacio  $U$ .

$$u(x) = a_0 1 + a_1 e^x + a_2 e^{-x} \longrightarrow (u(x) \text{ combinación lineal}).$$

INCÓGNITAS:  $\{a_0, a_1, a_2\}$

$$u'(x) = a_1 e^x - a_2 e^{-x}$$

$$u''(x) = a_1 e^x + a_2 e^{-x}$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x_0) = f(x_0) \\ u'(x_0) = f'(x_0) \\ u''(x_0) = f''(x_0) \end{array} \right\} 3 \text{ condiciones} \Rightarrow \text{Puedo resolver 3 incógnitas.}$$

Lo evalúo en  $x_0$ :

$$\left. \begin{array}{l} u(x_0) : a_0 + a_1 e^{x_0} + a_2 e^{-x_0} = f(x_0) \\ u'(x_0) : a_1 e^{x_0} - a_2 e^{-x_0} = f'(x_0) \\ u''(x_0) : a_1 e^{x_0} + a_2 e^{-x_0} = f''(x_0) \end{array} \right\} \text{SISTEMA LINEAL}$$



Con este sistema lineal nos preguntamos ... ¿Existe solución?  
 ¿Existe  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$ ? ¿Y son únicos?

La existencia y unicidad se estudia mediante el determinante.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^{x_0} & e^{-x_0} \\ 0 & e^{x_0} & -e^{-x_0} \\ 0 & e^{x_0} & e^{-x_0} \end{vmatrix} = \underbrace{e^{x_0} \cdot e^{-x_0}}_{e^0} - \underbrace{e^{x_0}(-e^{-x_0})}_{e^0} = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\Delta \neq 0}}$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$  Sistema Compatible Determinado  $\Rightarrow \exists$  una única solución

(b) Calcular la solución (los coeficientes)

$$v(x) = a_0 1 + a_1 e^x + a_2 e^{-x}$$

Utilizando las ecuaciones del sistema lineal anterior, despejamos los  $a_i$ :

$$\bullet 2a_1 e^{x_0} = g'(x_0) + g''(x_0) \longrightarrow g(x) \text{ es conocida.}$$

$$a_1 = \frac{g'(x_0) + g''(x_0)}{2} \cdot e^{-x_0}$$

$$\bullet a_2 e^{-x_0} = a_1 e^{x_0} - g'(x_0) = \frac{g'(x_0) + g''(x_0)}{2} - g'(x_0) = \frac{-g'(x_0) + g''(x_0)}{2}$$

$$a_2 = \frac{-g'(x_0) + g''(x_0)}{2} \cdot e^{x_0}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad a_0 &= f(x_0) - a_1 e^{x_0} - a_2 e^{-x_0} = f(x_0) - \frac{f'(x_0) + f''(x_0)}{2} + \frac{f'(x_0) - f''(x_0)}{2} = \\ &= \frac{2f(x_0) - 2f''(x_0)}{2} ; \end{aligned}$$

$$\boxed{a_0 = f(x_0) - f''(x_0)}$$

Por lo tanto, la función  $u(x)$  que interpola a  $f(x)$  es:

$$\boxed{u(x) = [f(x_0) - f''(x_0)] + \frac{f'(x_0) + f''(x_0)}{2} \cdot e^{x-x_0} + \frac{-f'(x_0) + f''(x_0)}{2} \cdot e^{-(x-x_0)}}$$

- © Hallar la función  $u(x) \in U$  que interpola, en el sentido anterior (Taylor)  
a  $f(x) = x^2 - 1$  en el punto  $x_0 = 0$  ( $x_0 = 0$  en el apartado b)

# PROBLEMAS DE INTERPOLACIÓN.

## \* PROBLEMA 4.

Función de Clase 1

Sea el espacio vectorial de funciones  $E$  dado por funciones  $u \in C^1([-1,1])$  tal que:

$$u(x) = \begin{cases} a_0 + a_1x + a_2x^2 & , x \in [-1,0] \\ a_3 + a_4x & , x \in [0,1] \end{cases}$$

$$u(x) \in \mathcal{P}^2 \quad x \in [-1,0]$$

$$u(x) \in \mathcal{P}^1 \quad x \in [0,1]$$

Poner coeficientes distintos de  $a_0$  y  $a_1$ !

Demostrar que el problema de hallar  $u(x) \in E$  que cumpla:

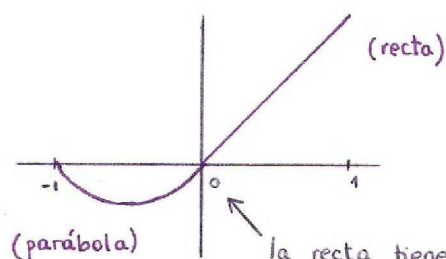
$$u(-1) = f(-1); \quad u(0) = f(0); \quad u'(1) = f'(1)$$

tiene solución y es única para cualquier  $f \in C^1([-1,1])$ .

$u(x)$  es una función definida a trozos. Cada una de sus partes son un polinomio ( $\mathcal{P}^2$  y  $\mathcal{P}^1$ ) y por lo tanto son funciones continuas y derivables.

Su aspecto será más o menos éste:

(Me dan  $f(x)$  y me piden que la interpole con una de este tipo)



la recta tiene que ser tg a la parábola en este punto.

PUNTO CRÍTICO:  $x = 0$

Los coeficientes tendrán que cumplir una serie de condiciones para que sean de tipo  $u(x) \rightarrow$  Continua y derivable.

\* CONTÍNUA EN 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a_3 + a_4 x) = a_3$$

Para que sea continua es necesario que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} = \lim_{x \rightarrow 0^+}$

$$a_0 = a_3$$

\* DERIVABLE EN 0:

$$u'(x) = \begin{cases} a_1 + 2a_2 x & , x \in (-1, 0) \\ a_4 & , x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} u'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a_1 + 2a_2 x) = a_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a_4) = a_4$$

Para que sea derivable es necesario que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} = \lim_{x \rightarrow 0^+}$

$$a_1 = a_4$$

Por lo tanto, la función  $u(x)$  quedará de la forma:

$$u(x) = \begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 & , x \in [-1, 0] & (P_2) \\ a_0 + a_1 x & , x \in [0, 1] & (P_1) \end{cases}$$

$P_2 \Rightarrow$  Subespacio de dim 3  $\rightarrow$  Sus funciones se pueden obtener a partir de:  $\{1, x, x^2\}$

$P_1 \Rightarrow$  Subespacio de dim 2  $\rightarrow$  Sus funciones se pueden obtener a partir de:  $\{1, x\}$

Ahora vamos a interpolar:

Primero imponemos las condiciones que debe cumplir  $u(x)$ :

$$\left. \begin{aligned} u(-1) &= a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 = f(-1) \\ &\quad \uparrow \text{ uso la fórmula para } x \in [-1, 0] \\ u(0) &= a_0 + a_1(0) = a_0 = f(0) \\ &\quad \uparrow \text{ me da igual qué fórmula usar} \\ u'(1) &= a_1 = f'(1) \end{aligned} \right\} \text{ Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.}$$

¿Existe solución única?

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$  Queda demostrado que existe una solución, y que además, es única.

∃ una única terna  $(a_0, a_1, a_2)$   
solución del sistema.

Vamos a hallar la solución:

Despejando del sistema ...

$$a_0 = f(0)$$

$$a_1 = f'(1)$$

$$a_2 = f(-1) - f(0) + f'(1)$$

$$u(x) = \begin{cases} f(0) + f'(1)x + [f(-1) - f(0) + f'(1)]x^2 & ; x \in [-1, 0] \\ f(0) + f'(1)x & ; x \in [0, 1] \end{cases}$$

### 3. POLINOMIO DE LAGRANGE (PARA EL CASO CLÁSICO).

Sean un conjunto de puntos  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  y una función  $f(x_i)$  definida en esos puntos, o bien nos dan los datos  $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ .

Nos piden calcular el polinomio  $p_n \in \mathcal{P}_n$  (grado  $\leq n$ ) tal que ese polinomio coincida con  $f(x_i)$  o con  $z_i$  en los puntos  $x_i$ ; es decir:

$$p_n \in \mathcal{P}_n \mid p_n(x_i) = f(x_i) \quad (= z_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$



Esto es un problema  
de Interpolación Polinomial  
Clásica.

$\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$



Soporte de Interpolación

Supongamos también que  $x_i \neq x_j$ ,  $i \neq j$ , por lo que sabemos que existe una solución única para el problema planteado:

$$x_i \neq x_j, \quad i \neq j \Rightarrow \exists ! p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \text{ SOLUCIÓN}$$

Se llama POLINOMIO DE LAGRANGE I-ÉSIMO a un polinomio  $l_i$  de grado no superior a  $n$ , tal que en el punto  $x_i$  del soporte tome el valor "1" y en todos los demás puntos  $x_j$  ( $x_j \neq x_i$ ) tome el valor "0" es decir:

$$l_i \in \mathcal{P}_n \mid l_i(x_i) = 1, \quad l_i(x_j) = 0 \quad ; \quad x_i \neq x_j$$

$$l_i(x_j) = 0 \longrightarrow \text{Raíz del polinomio.}$$



Todos los  $x_j$  ( $x_i$  no) son raíces del polinomio, ya que  $l_i(x_j) = 0$ .

Por lo tanto, hay  $n$  raíces de  $l_i$ :

$$l_i(x) = A (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)$$

Para que se anule si  $x=x_0$  (y así con todos menos con  $x_i$ )  
Un factor

$l_i(x) \Rightarrow$  Polinomio de grado  $n$ .

$n$  RAÍCES  $\Rightarrow$  GRADO  $n$

El polinomio  $l_i(x)$  descompuesto en factores es el que acabamos de ver y es imposible que tenga más factores.

En cambio, en  $x_i \dots$  (Sustituimos  $x=x_i$ )

$$l_i(x_i) = 1 = A (x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)$$

Vemos que no interviene:  
 $(x_i-x_i)$

Eso está bien, porque en  $x_i$  no se anula el polinomio.

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

### POLINOMIOS DE LAGRANGE

(Según el factor que se elimina —valor de  $i$ — tendremos  $n+1$  polinomios)

Esta serie de polinomios  $l_0, \dots, l_n$   
forman la  
BASE DE LAGRANGE.

## \* DEMOSTRACIÓN DE QUE FORMAN LA BASE DE LAGRANGE:

Forman un espacio en la base:

$$\{l_0, l_1, \dots, l_n\} \text{ base del espacio } \mathcal{P}_n \equiv \text{BASE DE LAGRANGE}$$

$\downarrow$   
 $\dim = n+1$

Hay que demostrar que son independientes los elementos de dicha base. ¿Y eso cómo se demuestra?

Tenemos:  $0 = b_0 l_0(x) + b_1 l_1(x) + \dots + b_n l_n(x)$   $\rightarrow$

Si son independientes, para que se cumpla la ecuación anterior, todos los  $b_i$  deben ser 0.

Tomamos el punto  $x = x_i$ :

$$0 = b_0 l_0(x_i) + b_1 l_1(x_i) + \dots + b_n l_n(x_i) = \underbrace{b_i l_i(x_i)}_{\substack{\text{(Los demás términos} \\ \text{valen 0).}}} = \underbrace{b_i}_{1} l_i(x_i) = b_i = 0 \quad ; \quad i = 0, \dots, n$$

$\rightarrow$  Efectivamente,  
 $b_i = 0 \quad \forall i$

LOS POLINOMIOS DE LAGRANGE ESTÁN DEFINIDOS  
EN TÉRMINOS DEL SOPORTE.

SI CAMBIO EL SOPORTE, CAMBIAN TAMBIÉN LOS  
POLINOMIOS.

\* ¿PARA QUÉ SIRVE LA BASE DE LAGRANGE?

Polinomio solución  $\Rightarrow p_n(x)$

$\implies$  Se puede escribir en función de cualquier base.

Sirve para expresar el polinomio solución en términos de los polinomios de Lagrange.

$$p_n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n ; \quad p_n(x_i) = f(x_i)$$

$\hookrightarrow$  combinación lineal de los elementos de la base.

donde usamos la base:  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

$$p_n = c_0l_0(x) + c_1l_1(x) + \dots + c_nl_n(x) ; \quad p_n(x_i) = c_i \underbrace{l_i(x_i)}_1 = c_i = f(x_i)$$

donde usamos:  $\{l_0, l_1, \dots, l_n\} \rightarrow$  Base de Lagrange.

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) \cdot l_0(x) + \dots + f(x_n) \cdot l_n(x) = \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot l_i(x) \end{aligned}$$

$\rightarrow$  FÓRMULA DE LAGRANGE  
PARA EL CASO DE  
INTERPOLACIÓN  
POLINOMIAL CLÁSICA.

(Para otros casos hay otras fórmulas)

YA NO ES NECESARIO RESOLVER EL SISTEMA:  
HALLAMOS LOS POLINOMIOS  $l_i$  Y  
LOS VALORES  $f(x_i)$   
Y TENEMOS LA SOLUCIÓN.

(26/10/07)

A continuación vamos a estudiar la generalización del problema y cómo se aplica a diferentes casos.

#### 4. PROBLEMA GENERAL DE INTERPOLACIÓN.

1º) Espacio interpolador (espacio donde se busca la solución):

$V$  espacio vectorial,  $\dim V = n+1$

2º) Aplicación:

$L_i : V \rightarrow \mathbb{R}$  Lineales,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$

$\hookrightarrow L_i$  hace corresponder a cada función  $f(x)$  un número real.

3º) Condiciones:

$z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}$

4º) Enunciado:

Encontrar  $v \in V$  tal que  $L_i(v) = z_i$

#### 4.1. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL CLÁSICA.

1º) Espacio interpolador (busco un polinomio):

$V = \mathcal{P}_n \equiv$  Espacio de los polinomios de grado  $\leq n$ .

2º) Aplicación:

$L_i : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R}$   $i = 0, 1, 2, \dots, n$

$\parallel$

$p \rightarrow p(x_i) \mid x_0, \dots, x_n \mid$  Soporte

$\hookrightarrow$  A cada polinomio le hace corresponder su imagen.

3º) Condiciones:

$$\begin{array}{ccccccc} f(x_0) & , & f(x_1) & , & \dots & , & f(x_n) \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ z_0 & & z_1 & & & & z_n \end{array}$$

4º) Enunciado:

Encontrar un polinomio  $p \in \mathcal{P}_n$  tal que  $p(x_i) = f(x_i) = z_i$ ,  $i = 0, \dots, n$

#### 4.2. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL DE TAYLOR.

El enunciado es el siguiente: "Conocidos los valores de la función  $f(x)$  y sus sucesivas derivadas hasta el grado  $n$  en un punto  $x_0$ , hallar el polinomio  $p(x)$  tal que  $p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$   $i = 0, \dots, n$ ".

$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad f \in C^n(\{x_0\}). \quad \text{Entonces } p \in \mathcal{P}_n / p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) \quad i = 0, \dots, n$$

Vamos a intentar expresarlo como un problema general de interpolación:

1º) Espacio interpolador (busco un polinomio):

$$V = \mathcal{P}_n$$

2º) Aplicación (a cada polinomio le hace corresponder su imagen, que en este caso es la derivada del polinomio):

$$L_i: \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow p^{(i)}(x_0) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

3º) Condiciones:

$$z_i = f^{(i)}(x_0) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

# \* PROBLEMA 1

Sea  $U$  el espacio vectorial de funciones generado por  $\{1, e^x, e^{-x}\}$

- a) Estudiar la existencia y unicidad de la solución del problema de hallar  $u(x) \in U$  que interpole en el sentido de Taylor a una función  $f(x) \in C^2$  en el punto  $x_0$ . Esto es,  $u^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$   $i = 0, 1, 2$ .

Vamos a plantear el problema:

\*  $V = U$  (Espacio interpolador, en el que estamos buscando la solución).

\*  $L_i(v) = v^{(i)}(x_0)$

\*  $z_i = f^{(i)}(x_0)$

## CASO CLÁSICO:

Sea  $V = \mathcal{P}_n$  (Busco un polinomio)

¿  $p \in \mathcal{P}_n$  ? /  $p(x_i) = f(x_i)$   $i = 0, 1, \dots, n$

Recordamos del día anterior que los polinomios de Lagrange ( $l_i$ ) forman la base de Lagrange:

$$l_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad l_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j=i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Como  $\{l_0, l_1, \dots, l_n\}$  es la base de Lagrange del espacio  $\mathcal{P}_n$ , puedo poner el polinomio que busco en forma de combinación lineal de los elementos de dicha base:

$$\boxed{1} \quad p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i l_i(x)$$

$$\boxed{2} \quad p(x_j) = \sum_{i=0}^n \alpha_i l_i(x_j) = \alpha_j \underbrace{l_j(x_j)}_1 = \alpha_j = f(x_j) \rightarrow \text{Porque quiero que } p(x_j) = f(x_j)$$



Como  $\alpha_j = f(x_j)$ , sustituyendo en **1**, obtengo que el polinomio buscado que es solución del problema de interpolación clásica es el siguiente:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot l_i(x)$$

fórmula de Lagrange

## 5. BASE DE LAGRANGE (CASO GENERAL)

La base de Lagrange para el problema general de interpolación (pág.17) \* es  $B = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  cumpliendo:

$$L_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j=i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

\* Encontrar  $v \in V / L_i(v) = z_i$

Supongamos que  $v$  es una solución del problema  $\rightarrow v$  solución de  $L_i(v) = z_i$

Siempre que tenemos una base es posible poner la solución como combinación lineal de los elementos de dicha base:

$$v = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \quad \text{¿}\alpha_i\text{?}$$

$$L_i(v) = \alpha_0 L_i(v_0) + \alpha_1 L_i(v_1) + \dots + \alpha_n L_i(v_n) = \alpha_i \underbrace{L_i(v_i)}_1 = \alpha_i = z_i$$

$$\alpha_i = z_i$$

(por el problema general de interpolación)

Entonces, sustituyendo ...

$$v = z_0 v_0 + z_1 v_1 + \dots + z_n v_n$$

$\rightarrow$  Solución al problema de interpolación en términos de la base

(Seguimos con el ejercicio).

\* PROBLEMA 1

- (b) Hallar la base de Lagrange del problema de interpolación planteado en el apartado anterior.

$$\{1, e^x, e^{-x}\} \quad \text{¿} u \in U? \quad u^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$$

$$L_i : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \rightarrow v^{(i)}(x_0) \quad i=0,1,2 \quad (\text{A cada } v \text{ le hago corresponder la derivada}).$$

Vamos a hallar la base de Lagrange:

$$B = \{v_0, v_1, v_2\} \rightarrow 3 \text{ formas lineales.}$$

¿Qué tiene que cumplir la base de Lagrange?

$$L_i(v_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Teniendo en cuenta esta condición, podemos ir hallando los distintos vectores de la base ( $v_i$ ):

\*  $v_0$ :

$$L_i(v_0) = \begin{cases} 1 & i=0 \\ 0 & i=1,2 \end{cases}$$

$$v_0^{(i)}(x_0) \rightarrow \text{Derivada } i\text{-ésima de la función } v_0 \text{ en el punto } x_0$$

¿Y  $v_0$  quién es? Es un elemento del espacio de funciones que nos dan en el enunciado:

$$v_0(x) = a_0 1 + b_0 e^x + c_0 e^{-x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Derivada 0} \leftarrow L_0(v_0) = v_0(x_0) = a_0 + b_0 e^{x_0} + c_0 e^{-x_0} = 1 \\ \text{"} \\ \text{La propia función} \quad L_1(v_0) = v_0'(x_0) = b_0 e^{x_0} - c_0 e^{-x_0} = 0 \\ \quad \quad \quad L_2(v_0) = v_0''(x_0) = b_0 e^{x_0} + c_0 e^{-x_0} = 0 \end{array} \right\} \text{ Sistema con las incógnitas: } a_0, b_0, c_0$$

Se resuelve el sistema  $\rightarrow$  3 ecs y 3 inc.  $\Rightarrow$   $\exists$  solución única.

$$\left. \begin{array}{l} b_0 = c_0 = 0 \\ a_0 = 1 \end{array} \right\} v_0 = a_0 1 + b_0 e^x - c_0 e^{-x} \rightarrow v_0(x) = 1$$

Hay que repetir el mismo procedimiento para hallar  $v_1$  y  $v_2$ . Cuando los tengamos, habremos obtenido la base de Lagrange. Entonces ya podremos expresar la solución  $v$  en términos de la base.

EXPRESAR LA SOLUCIÓN  $v$  EN TÉRMINOS  
DE LA BASE DE LAGRANGE  
||  
HALLAR LA FÓRMULA DE LAGRANGE

Combinación lineal

(30/10/07)

#### \* PROBLEMA 2.

Hallar el polinomio de 2º grado que interpole a una función  $f(x)$  cumpliendo las siguientes condiciones:

$$p(x): \quad p(0) = f(0) \quad ; \quad p'(x_1) = f'(x_1) \quad ; \quad p(1) = f(1) \quad x_1 \in \mathbb{R}$$

(a) Indicar si existen condiciones adicionales para que tenga solución única.

$p(x) \equiv$  Polinomio buscado. Lo podemos expresar de la siguiente forma:

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = ax^2 + bx + c \\ p'(x) = 2ax + b \end{array} \right\}$$

Imponemos las condiciones:

$$\left. \begin{aligned} p(0) = f(0) &\rightarrow c = f(0) \\ p'(x_1) = f'(x_1) &\rightarrow 2ax_1 + b = f'(x_1) \\ p(1) = f(1) &\rightarrow a + b + c = f(1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Hay que estudiar} \\ &\text{el determinante} \\ &\text{del sistema.} \\ &(\text{Incógnitas: } a, b, c) \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x_1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x_1 - 1 \quad ; \quad 2x_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

→ Por lo tanto,  $x_1 \neq \frac{1}{2}$  implica la existencia de solución única ( $\Delta \neq 0$ ).

• ¿Qué ocurre si  $x_1 = \frac{1}{2}$ ?

$$\left. \begin{aligned} c &= f(0) \\ a + b &= f'(\frac{1}{2}) \\ a + b + c &= f(1) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Fijándonos en los términos independientes,} \\ &\text{vemos que se debe cumplir la condición:} \end{aligned}$$

$$f'(\frac{1}{2}) + f(0) = f(1)$$

→ Por lo tanto, si  $f'(\frac{1}{2}) + f(0) \neq f(1) \Rightarrow$  No existe ninguna solución.

• ¿Qué ocurre si  $f'(\frac{1}{2}) + f(0) = f(1)$ ?

Sobra la 3ª ecuación del sistema porque es redundante. Se elimina.

$$\left. \begin{aligned} c &= f(0) \\ a + b &= f'(\frac{1}{2}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} b &= f'(\frac{1}{2}) - a \\ c &= f(0) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} &\text{Tiene } \infty \text{ soluciones} \\ &\text{porque depende de} \\ &\text{un parámetro (a).} \end{aligned} \right.$$

→ El polinomio solución para este caso sería:

$$p(x) = ax^2 + \left[ f'(\frac{1}{2}) - a \right]x + f(0)$$

(Esto es el estudio completo, el problema no nos pedía tanto).

- (b) Sea  $q(x)$  polinomio de 2º grado.  
 $q(0)$ ,  $q(1)$  son conocidos.

Encontrar una expresión para la pendiente en el punto medio ( $x = 1/2$ )

$$q(x) = ax^2 + bx + c$$

$$q'(x) = 2ax + b \longrightarrow q'(1/2) = a + b$$

Sustituimos en el punto  $x = 1/2$ :

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} c &= q(0) \\ a + b &= q'(1/2) \\ a + b + c &= q(1) \end{aligned} \right\} \text{La pendiente es la derivada en ese punto.} \end{aligned}$$

Despejando del sistema...

$$a + b = q'(1/2) = q(1) - c = q(1) - q(0) \Rightarrow$$

$$q'(1/2) = q(1) - q(0)$$

↳ Expresión para la  
pendiente en  $x = \frac{1}{2}$

- (c) Para el caso  $x_1 = 0$  calcular la base de Lagrange.

$x_1 = 0 \Rightarrow \exists$  una única solución (lo sabemos por el apartado (a) del problema)

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$p'(x) = 2ax + b$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} c &= f(0) \\ 2ax_1 + b &= f'(x_1) \\ a + b + c &= f(1) \end{aligned} \right\} \text{Sustituimos } x_1 = 0 : & \left. \begin{aligned} c &= f(0) \\ b &= f'(0) \\ a + b + c &= f(1) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Se trata de interpolación polinomial porque buscamos un polinomio, pero no es el caso clásico, ya que no nos dan 3 puntos, sino 2 puntos y 1 derivada.



$$L_j : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z_0, z_1, z_2$$

$$\begin{cases} L_0 : v \rightarrow L_0(v) = v(0) \\ L_1 : v \rightarrow L_1(v) = v'(0) \\ L_2 : v \rightarrow L_2(v) = v(1) \end{cases}$$

Encontrar  $p(x) \in \mathcal{P}_2$  tal que:

$$L_0(p) = z_0 ; L_1(p) = z_1 ; L_2(p) = z_2$$

↳ PROBLEMA GENERAL DE INTERPOLACIÓN.

Por tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} z_0 &= f(0) \rightarrow \text{La forma lineal de } p \text{ (} L_0(p) \text{) es } p'(0) \text{ y quiero} \\ z_1 &= f'(0) \rightarrow \text{que coincida con } f'(0). \\ z_2 &= f(1) \end{aligned}$$

Vamos a hallar la base:

\* Base usual de  $\mathcal{P}_2$  :  $\{1, x, x^2\}$

\* Base de Lagrange :  $B = \{v_0, v_1, v_2\} \rightarrow (v_i \text{ son desconocidos, tengo que calcularlos})$

Para hallar los vectores de la base utilizo definición de la base de Lagrange:

$$L_j(v_i) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$v_i$  SON POLINOMIOS DE 2º GRADO PORQUE PERTENECEN A  $\mathcal{P}_2$ .

$$* \quad v_0(x) = a_0 x^2 + b_0 x + c_0 \quad \text{-----} \quad \downarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0(0) = L_0(v_0) = 1 \longrightarrow c_0 = 1 \\ v_0'(0) = L_1(v_0) = 0 \longrightarrow b_0 = 0 \\ v_0(1) = L_2(v_0) = 0 \longrightarrow a_0 + b_0 + c_0 = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} a_0 = -1 \\ b_0 = 0 \\ c_0 = 1 \end{array}$$

$$v_0(x) = -x^2 + 1$$

$$* \quad v_1(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(0) = L_0(v_1) = 0 \longrightarrow c_1 = 0 \\ v_1'(0) = L_1(v_1) = 1 \longrightarrow b_1 = 1 \\ v_1(1) = L_2(v_1) = 0 \longrightarrow a_1 + b_1 + c_1 = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} a_1 = -1 \\ b_1 = 1 \\ c_1 = 0 \end{array}$$

$$v_1(x) = -x^2 + x$$

$$* \quad v_2(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_2(0) = L_0(v_2) = 0 \longrightarrow c_2 = 0 \\ v_2'(0) = L_1(v_2) = 0 \longrightarrow b_2 = 0 \\ v_2(1) = L_2(v_2) = 1 \longrightarrow a_2 + b_2 + c_2 = 1 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} a_2 = 1 \\ b_2 = 0 \\ c_2 = 0 \end{array}$$

$$v_2(x) = x^2$$

$$\mathcal{B} = \{ -x^2 + 1, -x^2 + x, x^2 \} \rightarrow \text{BASE DE LAGRANGE}$$

$\downarrow$   
 Son 3 vectores (polinomios)  
 de 2º grado.

Sea la base de Lagrange  $B = \{-x^2+1, -x^2+x, x^2\}$  vamos a calcular la fórmula de Lagrange para dicha base:

$$\left. \begin{array}{l} v \in V \\ B = \{v_0, v_1, v_2\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{La solución } v \text{ sería:} \\ v = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \end{array}$$



En general:  $v = \alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=0}^n \alpha_i v_i$

¿Y quién es  $\alpha_i$ ? Sabemos que  $v$  cumple:  $L_0(v) = z_0$ ;  $L_1(v) = z_1$ ;  $L_2(v) = z_2$

Aplicamos las 3 fórmulas lineales y hallamos  $\alpha_i$ :

$$L_0(v) = z_0 = \alpha_0 \underbrace{L_0(v_0)}_1 + \alpha_1 \underbrace{L_0(v_1)}_0 + \alpha_2 \underbrace{L_0(v_2)}_0 = \alpha_0 = z_0$$

$$L_1(v) = z_1 = \alpha_0 \underbrace{L_1(v_0)}_0 + \alpha_1 \underbrace{L_1(v_1)}_1 + \alpha_2 \underbrace{L_1(v_2)}_0 = \alpha_1 = z_1$$

$$L_2(v) = z_2 = \alpha_0 \underbrace{L_2(v_0)}_0 + \alpha_1 \underbrace{L_2(v_1)}_0 + \alpha_2 \underbrace{L_2(v_2)}_1 = \alpha_2 = z_2$$

Por tanto, la solución es:

$v = z_0 v_0 + z_1 v_1 + z_2 v_2$

→ Solución general del problema de interpolación.

Sabemos el valor de  $z_i$  y  $v_i$ . La solución para nuestro problema en concreto es:

$v(x) = g(0)(-x^2+1) + g'(0)(-x^2+x) + g(1)x^2$

→ La solución era única, así que éste es el único polinomio solución.

## 6. ERROR DE INTERPOLACIÓN.

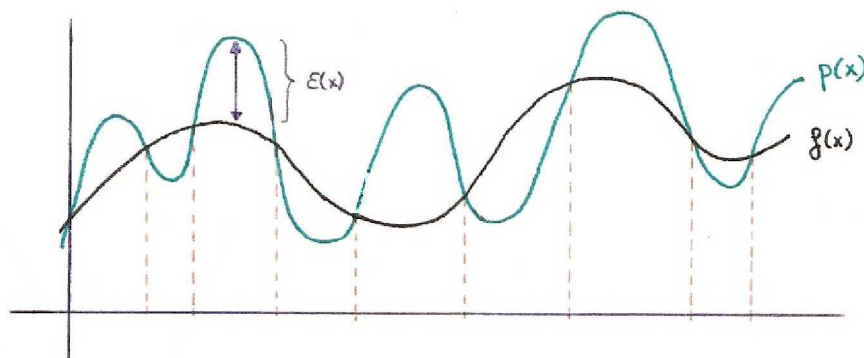
¿Qué error estamos cometiendo al interpolar?

**TEOREMA.-** Supongamos una función  $f \in C^{(n+1)}([a, b])$  y  $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ .  
 $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  es el soporte de interpolación y suponemos todos los  $x_i$  distintos.

Sea  $p_n(x)$  el polinomio que interpola en el sentido clásico a la función  $f$  en el soporte  $\{x_0, \dots, x_n\}$

$$\text{Sea } |E(x)| = |p_n(x) - f(x)| \quad x \in [a, b]$$

↳ ERROR COMETIDO EN EL PUNTO  $x$



$f \in C^{(n+1)} \equiv$  Clase  $(n+1) \equiv f$  tiene  $n+1$  derivadas continuas.

Vamos a dar una estimación del error.

¿CUÁL PUEDE SER EL SOPORTE (LOS  $x_i$ ) QUE HACE MÍNIMO EL ERROR? (Lo veremos más adelante).

$$|E(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| \quad \text{para algún } \xi_x \in [a, b]$$

$$|E(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi_x)|}{(n+1)!} \cdot |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)|$$

↳  $\leq C$   
(acotado)

EL ERROR DEPENDE DEL SOPORTE.

\* PROBLEMA 6.

Acotar el error que se produce en el intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  al sustituir la función original  $f(x) = \sin x$  por su polinomio interpolador en los puntos  $\{0, \frac{\pi}{2}\}$  ¿y si lo interpolamos en  $\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$ ?

$$n = 1$$

$$\mathcal{E}(x) = \left| \frac{f''(\xi_x)}{2!} \cdot (x-0)(x-\pi/2) \right|$$

No nos interesa el polinomio.  
Nos interesa el error.

$$f'(x) = \cos x$$

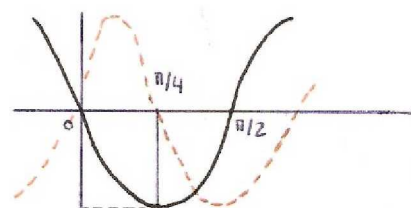
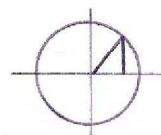
$$f''(x) = -\sin x$$

$$|f''(\xi_x)| \leq 1$$

$$y = x \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi^2}{16}$$

$$\mathcal{E}(x) \leq \frac{1}{2} \left| \frac{-\pi^2}{16} \right| = \frac{\pi^2}{32}$$





\* PROBLEMA 7.

$$f(x_0) ; f'(x_0) ; f''(x_0)$$

Función interpolante de la forma  $\rightarrow r(x) = \frac{A + B(x - x_0)}{1 + C(x - x_0)}$

- Ⓐ ¿Qué condiciones debe cumplir  $f(x)$  en  $x_0$  para asegurar la existencia y unicidad de la solución?

$$r' = \frac{B[1 + C(x - x_0)] - [A + B(x - x_0)]C}{[1 + C(x - x_0)]^2} = \frac{B - AC}{[1 + C(x - x_0)]^2}$$

$$r''(x) = \frac{-2(B - AC)C}{[1 + C(x - x_0)]^3}$$

Sustituimos en  $x = x_0$

$$\left. \begin{aligned} r(x_0) &= A &= f(x_0) \\ r'(x_0) &= B - AC &= f'(x_0) \\ r''(x_0) &= -2C(B - AC) &= f''(x_0) \end{aligned} \right\}$$

$$A = f(x_0)$$

$$B - AC = f'(x_0)$$

$$-2C \cdot f'(x_0) = f''(x_0) \Rightarrow C \quad ? \quad \text{Se pueden dar varias situaciones...}$$

$$1^{\circ}) f'(x_0) \neq 0 \rightarrow C = \frac{-f''(x_0)}{2f'(x_0)}$$

$$A = f(x_0)$$

$$B = f'(x_0) + AC = f'(x_0) - \frac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{2 \cdot f'(x_0)}$$

Solución única  
cuando  $f'(x_0) \neq 0$

$$r(x) = \frac{A + B(x - x_0)}{1 + C(x - x_0)}$$

2º)  $f'(x_0) = 0$  y  $f''(x_0) \neq 0 \rightarrow$  No hay solución.

$$\begin{aligned} A &= f(x_0) \\ B - AC &= 0 \\ 0 &= f''(x_0) \end{aligned}$$

3º)  $f'(x_0) = 0$  y  $f''(x_0) = 0 \rightarrow \infty$  soluciones

$$\left. \begin{aligned} A &= f(x_0) \\ B &= C \cdot f(x_0) \end{aligned} \right\} \quad r(x) = \frac{f(x_0) + C f(x_0)(x - x_0)}{1 + C(x - x_0)}$$

↓  
Arbitrario

EN RESUMEN ...

- \*  $f'(x_0) \neq 0 \rightarrow$  Única solución
- \*  $f'(x_0) = 0$  ;  $f''(x_0) \neq 0 \rightarrow \nexists$  solución.
- \*  $f'(x_0) = f''(x_0) = 0 \rightarrow \infty$  soluciones

(b) Dada  $f(x) = -4xe^x - 1$ , hallar  $r(x)$  que interpola los valores de dicha función y de sus dos primeras derivadas en  $x_0 = 0$ .

$$f(x_0) = f(0) = -1$$

$$f'(x_0) = -4e^x - 4xe^x \quad ; \quad f'(0) = -4 \rightarrow \text{Una única solución}$$

$$f''(x_0) = -4e^x - 4e^x - 4xe^x \quad ; \quad f''(0) = -8$$

$f'(0) \neq 0 \rightarrow$  Sustituimos en el  $r(x)$  del 1º caso del apartado anterior.

$$A = -1$$

$$B = -4 - \frac{(-1)(-8)}{2(-4)} = -4 + 1 = -3$$

$$C = \frac{8}{-8} = -1$$

$$r(x) = \frac{3x + 1}{x - 1}$$

(6/11/2007)

## 7. FÓRMULA DE NEWTON, BASE DE NEWTON Y DIFERENCIAS DIVIDIDAS PARA EL PROBLEMA DE INTERPOLACIÓN CLÁSICA.

En un problema de interpolación clásica nos dan la siguiente información:

\* Una serie de puntos  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \equiv S$  (Soporte de Interpolación)

\* Las imágenes de la función en esos puntos:  $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  /

$$y_0 = f(x_0)$$

$$y_1 = f(x_1)$$

$\vdots$

$$y_n = f(x_n)$$

Además, sabemos que:

$x_i$  distintos dos a dos  $\Rightarrow \exists ! p_n \in \mathcal{P}_n$  solución.

"existe un único polinomio"

Y este polinomio  $p_n$  sabemos expresarlo en términos de la Base de Lagrange:

$$\left. \begin{array}{l} \{l_0, l_1, \dots, l_n\} \text{ Base de Lagrange} \\ l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \end{array} \right\} p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_i(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot l_i(x)$$

FÓRMULA DE LAGRANGE  
PARA INTERPOLACIÓN  
CLÁSICA.

Supongamos que una vez obtenido el polinomio, nos dan más puntos del soporte  $(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ . Sus imágenes serán  $(y_{n+1}, y_{n+2}, \dots)$ . Entonces, ¿cuál es el polinomio ahora?

$$x_{n+1} \longrightarrow y_{n+1} \quad \text{¿} p_{n+1} \text{?}$$

$$x_{n+2} \longrightarrow y_{n+2}$$

$$l_i^{(n)} \xrightarrow{?} l_i^{(n+1)}$$

De grado  $n$

SI SE AÑADE UN PUNTO NUEVO (O MÁS DE UNO)  
AL SOPORTE DE INTERPOLACIÓN, CAMBIAN TODOS LOS  
POLINOMIOS DE LAGRANGE. NO SE PUEDEN  
REUTILIZAR.

Vamos a ver qué ocurre...

Supongamos el soporte  $\{x_0, x_1, x_2\}$ . Tendríamos que los polinomios de Lagrange son:

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $y_0 \quad y_1 \quad y_2$  (imágenes)

De grado 2

$$l_0^{(2)}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$l_1^{(2)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2^{(2)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Ahora añadimos un punto nuevo al soporte:  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$   
Los polinomios nuevos serán:

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3$

$$l_0^{(3)}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$l_1^{(3)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$l_2^{(3)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$l_3^{(3)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$\{\}$  Diferencias, factores  
que antes no aparecían.

Como hemos podido comprobar, cada vez que se añade un punto al soporte, los polinomios de Lagrange cambian. Nos gustaría poder reutilizar los polinomios calculados anteriormente. Para ello utilizaremos otra base, que veremos a continuación.

El problema de interpolación clásica tiene el mismo planteamiento:

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \equiv S \equiv \text{Soporte de interpolación}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \{y_0, y_1, \dots, y_n\} \equiv \text{Imágenes de los puntos del soporte} \end{matrix}$$

$$x_i \text{ distintos 2 a 2} \Rightarrow \exists! p_n \in \mathcal{P}_n \text{ solución}$$

$$\text{Base} = \left\{ 1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \dots, [(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})] \right\}$$

⊗

$$\textcircled{*} p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_i(x) \rightarrow$$

$$\downarrow$$

$$f(x_i)$$

El polinomio  $p_n$  es único, pero lo escribo de otra manera, en función de los términos de otra base.

$$\mathcal{B} = \left\{ 1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \dots, [(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})] \right\}$$

BASE DE NEWTON PARA EL CASO DE INTERPOLACIÓN CLÁSICA.

Hay un polinomio de cada grado. Seguro que es una base.

Vamos a ver las ventajas de la Base de Newton.

1 → Grado 0  
 $x - x_0$  → " " 1  
 $(x - x_0)(x - x_1)$  → " " 2  
 $\vdots$



Supongamos que tenemos el soporte de interpolación:

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \equiv S$$

y sus respectivas imágenes:

$$\begin{array}{ccc} y_0, y_1, \dots, y_n \\ \parallel & & \parallel \\ f(x_0), \dots, f(x_n) \end{array}$$

$x_i$  distintos 2 a 2  $\Rightarrow \exists ! p_n \in \mathcal{P}_n$  solución

Base de Newton =  $\{1, x-x_0, \dots, [(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})]\}$

}  $p_n(x)$

Calculamos el polinomio  $p_n(x)$ :

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

↑ El polinomio es una combinación de los elementos de la base.

Este es el polinomio solución, pero ... ¿QUIÉNES SON LOS  $a_i$  DE  $p_n(x)$ ?

Condiciones que debe cumplir el polinomio:

$$p_n(x_0) = f(x_0) = a_0 \quad (\text{Se anulan los términos donde aparece } (x-x_0))$$

$$p_n(x_1) = f(x_1) = a_0 + a_1(x_1-x_0) \quad (\text{Se anula donde aparezca } (x-x_1))$$

$$p_n(x_2) = f(x_2) = a_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$$

;

$$p_n(x_n) = f(x_n) = a_0 + a_1(x_n-x_0) + \dots + a_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})$$

SISTEMA

Resolvemos este sistema, en el que las incógnitas serán los coeficientes  $a_i$ .  
Si es incompatible no habrá solución.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) & \dots & (x_n - x_{n-1}) \end{vmatrix}$$

Se trata de un sistema (determinante) triangular. Con Lagrange esto no ocurría.

Al ser triangular, el determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal. Como ninguno de estos elementos es 0 (porque  $x_i \neq x_j \forall i, j$ ), el determinante no puede ser 0:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{diagonal} & 0 \\ & \ddots \\ & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta \neq 0 \Rightarrow \exists \text{ SOLUCIÓN ÚNICA.}$$

Supongamos ahora que ya hemos resuelto el sistema. Ya tenemos calculados los  $a_i$  y, por tanto, conocemos el polinomio solución.

Añadimos un elemento nuevo al soporte:  $x_{n+1} \rightarrow$  Tenemos que ajustar el polinomio hallado anteriormente a esta nueva medida  $x_{n+1}$ , de la que, lógicamente, también conocemos su imagen  $f(x_{n+1})$ .

Ahora su base sería:

$$B = \left\{ 1, x - x_0, (x - x_0)(x - x_1), \dots, [(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})], \boxed{[(x - x_0) \dots (x - x_n)]} \right\}$$

Ahora el polinomio solución sería:

$$p_{n+1}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n[(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})] + \boxed{a_{n+1}[(x - x_0) \dots (x - x_n)]}$$

     Términos que antes no aparecían.

Tanto el polinomio como la base son el polinomio / base anterior más "algo más". Por tanto, se pueden reutilizar.

A la hora de imponer condiciones obtendremos las mismas ecuaciones (se pueden reutilizar los  $a_i$ ), pero hay que añadir una más:

$$p_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1}) = a_0 + a_1(x_{n+1} - x_0) + a_2(x_{n+1} - x_0)(x_{n+1} - x_1) + \dots + a_n(x_{n+1} - x_0)\dots(x_{n+1} - x_{n-1}) + a_{n+1}(x_{n+1} - x_0)\dots(x_{n+1} - x_n)$$

Hay que añadir una nueva fila al determinante que, por lo demás, es el mismo de antes.

Fijándonos en el sistema, es muy fácil calcular los coeficientes  $a_i$  de manera ordenada, al ser un sistema triangular:

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

⋮

DIFERENCIAS  
DIVIDIDAS

Así se les llama  
a los  $a_i$

→ NOTACIÓN PARA LAS DIFERENCIAS DIVIDIDAS:

$$a_0 = f[x_0]$$

$$a_1 = f[x_0, x_1]$$

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$

⋮

$$a_n = f[x_0, \dots, x_n]$$

Podemos expresar el polinomio de la siguiente forma:

$$p_n(x) = \underbrace{f[x_0]}_{a_0} + \underbrace{f[x_0, x_1]}_{a_1} \cdot (x - x_0) + \underbrace{f[x_0, x_1, x_2]}_{a_2} \cdot (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \underbrace{f[x_0, \dots, x_n]}_{a_n} \cdot (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

→ FÓRMULA DE NEWTON PARA EL CASO DE

INTERPOLACIÓN CLÁSICA  $\equiv$  EXPRESIÓN RECURSIVA  
DEL POLINOMIO.

EXPRESAR EL POLINOMIO INTERPOLADOR DE UNA  
FUNCIÓN EN UN SOPORTE DADO EN  
TÉRMINOS DE LA BASE DE NEWTON.

||

HALLAR LA FÓRMULA DE NEWTON.

$$\begin{array}{lcl}
 x_0 & f(x_0) & \rightarrow p_0(x) = f[x_0] \quad (\text{Se anulan los términos donde aparece } (x-x_0)) \\
 x_1 & f(x_1) & \rightarrow p_1(x) = p_0(x) + f[x_0, x_1](x-x_0) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) \quad (\text{Se anulan si:}) \\
 x_2 & f(x_2) & \rightarrow p_2(x) = p_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) = \quad (\text{aparece } (x-x_1)) \\
 & & = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)
 \end{array}$$

Datos que  
nos dan

Vamos a ver cómo se calculan todas las diferencias divididas.

### 7.1. CÁLCULO DE LAS DIFERENCIAS DIVIDIDAS.

- PROPIEDAD 1. - Esta es una fórmula fundamental que nos permite calcular todas las diferencias divididas:

$$f[x_0, \dots, x_k] = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k (x_i - x_j)}$$

luego ...

$$\begin{aligned}
 f[x_0, \dots, x_k] = & \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_k)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_k)} + \\
 & + \dots + \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})}
 \end{aligned}$$

• Demostración:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Soporte} \rightarrow & x_0 & x_1 & \dots & x_k \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ & f(x_0) & f(x_1) & & f(x_k) \end{array}$$

Vamos a escribir el polinomio interpolador de 2 maneras: en términos de la base de Lagrange y de la base de Newton.

FÓRMULA DE NEWTON  $\rightarrow p_k(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_k](x-x_0)\dots(x-x_{k-1})$

FÓRMULA DE LAGRANGE  $\rightarrow p_k(x) = \sum_{i=0}^k f(x_i) \cdot \overset{\text{De grado } k}{l_i^{(k)}(x)} = \sum_{i=0}^k f(x_i) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

Como ambos  $p_k(x)$  son el mismo polinomio, comparamos los coeficientes de las 2 expresiones...

Nos vamos a fijar en el coeficiente de  $x^k$  en cada una de las 2 expresiones:

- \* En el último sumando de  $p_k(x)$  según Newton tenemos  $k$  factores:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] \cdot \underbrace{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})}$$

Desarrollando este producto obtengo "algo" de grado  $k \rightarrow x^k + \dots$  (cosas de grado  $< k$ )

Por lo tanto, según Newton:

Coeficiente  $x^k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$



- \* El factor  $x^k$  en el polinomio expresado según la fórmula de Lagrange será el sumando:

$$f(x_i) \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_k)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_k)}$$

↳ No está  $(x_i-x_i)$

Como siempre se cumple que  $i \neq j$ , en cada uno de los sumandos hay  $k$  factores.

Por lo tanto, el coeficiente de  $x^k$  según Lagrange será:

$$\text{Coeficiente } x^k = \frac{1}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_k)} \cdot f(x_i)$$

↑  
No está  $(x_i-x_i)$

Comparando ambos coeficientes, tenemos que:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{i=0}^k f(x_i) \cdot \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^k (x_i - x_j)}$$

↑ Hemos llegado a la fórmula que queríamos demostrar.

• PROPIEDAD 2.-  $f[x_2, x_1, x_3, x_0, \dots, x_n] \equiv f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

LAS PERMUTACIONES DE LOS ELEMENTOS DEL SOPORTE NO ME ALTERAN EL RESULTADO DE LA DIFERENCIA DIVIDIDA (PORQUE SIMPLEMENTE CAMBIA EL ORDEN DE LOS SUMANDOS).

Es decir:  $f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

↖ Cualquier permutación de los  $x_i$

$\{\sigma(0), \sigma(1), \dots, \sigma(n)\} \equiv \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow$  (Son conjuntos, no importa el orden)

- PROPIEDAD 3. - Esta fórmula es la manera más común de calcularlas:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_k] - f[x_1, x_2, \dots, x_{k+1}]}{x_0 - x_{k+1}}$$

↑  
Tenemos  $k+2$  datos.

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

¿Para qué sirve la propiedad 3? ¿Cómo se aplica?

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_1] = f(x_1)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

ASÍ, RECURSIVAMENTE, PUEDO HALLAR  
TODAS LAS DIFERENCIAS DIVIDIDAS.

Esta fórmula me permite expresar la diferencia en 3 puntos en términos de diferencias en 2 puntos, diferencias en 4 puntos en términos de diferencias en 3 puntos, etc...

El polinomio solución expresado según la fórmula de Newton, es el siguiente:

$$p_n(x) = \underbrace{f[x_0]}_{?} + \underbrace{f[x_0, x_1]}_{?}(x-x_0) + \underbrace{f[x_0, x_1, x_2]}_{?}(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \underbrace{f[x_0, \dots, x_n]}_{?}(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

¿Cómo hallamos los coeficientes (diferencias divididas) que intervienen en  $p_n(x)$ ? Se utiliza una tabla como la que sigue:

$x_i$	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	... $f[x_i, \dots, x_n]$
$x_0$	$f[x_0]$			
$x_1$	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1}$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
$x_2$	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_1] - f[x_2]}{x_1 - x_2}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$x_{n-1}$	$f[x_{n-1}]$		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$f[x_0, \dots, x_n]$
$x_n$	$f[x_n]$	$f[x_{n-1}, x_n]$		

Diferencias en 1 punto.  
A partir de ellas se calculan  
las diferencias en 2.

COEFICIENTES  
DE  $p_n(x)$

La última  
columna siempre  
tiene una sola  
diferencia dividida.

SE HALLAN DE FORMA RECURSIVA  
COLUMNA A COLUMNA.  
UNA VEZ CALCULADA LA TABLA,  
TENEMOS LOS COEFICIENTES.

• Demostración Propiedad 3:

\* Soporte  $\equiv \{x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\}$

[1] Polinomio solución  $\equiv p_{k+1}(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + \dots +$

$+ f[x_0, x_1, \dots, x_k] \underbrace{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{k-1})}_{x^k + \dots \text{ (de grado } k)} +$

$+ f[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}] \underbrace{(x-x_0) \dots (x-x_{k-1})(x-x_k)}_{-x_0 x^k - x_1 x^k - x_2 x^k - \dots - x_k x^k}$

\* Ahora cambio el orden del soporte:

Soporte  $\equiv \{x_{k+1}, x_k, \dots, x_1, x_0\}$

[2] Polinomio solución  $\equiv p_{k+1}(x) = f[x_{k+1}] + f[x_{k+1}, x_k](x-x_{k+1}) + \dots +$

$+ f[x_{k+1}, \dots, x_1] \underbrace{(x-x_{k+1})(x-x_k) \dots (x-x_2)}_{x^k + \dots \text{ (de grado } k)} +$

$+ f[x_{k+1}, \dots, x_0] \underbrace{(x-x_{k+1}) \dots (x-x_1)}_{-x_{k+1} \cdot x^k - x_k \cdot x^k - \dots - x_1 \cdot x^k}$

El polinomio es el mismo, pero está escrito de 2 maneras diferentes. Se halla el coeficiente de  $x^k$  en ambas expresiones, y al igualarlos saldrá la fórmula que queríamos demostrar.

Coeficiente  $x^k$ :

De [1]  $f[x_0, x_1, \dots, x_k] + f[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}](-x_0 - x_1 - \dots - x_k) =$

De [2]  $f[x_{k+1}, x_k, \dots, x_1] + f[x_{k+1}, x_k, \dots, x_0](-x_{k+1} - x_k - \dots - x_1)$

Es lo mismo cambiado de orden.

Por la propiedad 2, sé que son iguales.

Operamos:

$$\underbrace{f[x_0, x_1, \dots, x_k]} + \underbrace{f[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}](-x_0 - x_1 - \dots - x_k)} = \underbrace{f[x_{k+1}, x_k, \dots, x_1]} + \underbrace{f[x_{k+1}, x_k, \dots, x_0](-x_{k+1} - x_k - \dots - x_1)}$$

$$\underbrace{f[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}](-x_0 - x_1 - \dots - x_k)} - \underbrace{f[x_{k+1}, x_k, \dots, x_0](-x_{k+1} - x_k - \dots - x_1)} = f[x_{k+1}, x_k, \dots, x_1] - f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

Como son iguales (Propiedad 2), hago factor común

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}](-x_0 - \cancel{x_1} - \dots - \cancel{x_k} + \cancel{x_{k+1}} + \cancel{x_k} + \dots + \cancel{x_1}) = f[x_{k+1}, x_k, \dots, x_1] - f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

$$\rightarrow (\text{Prop. 2}) = f[x_1, \dots, x_{k+1}]$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}, x_k, \dots, x_1] - f[x_0, x_1, \dots, x_k]}{x_{k+1} - x_0} \cdot (-1) \cdot (-1)$$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_{k+1}] = \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_k] - f[x_1, \dots, x_{k+1}]}{x_0 - x_{k+1}}$$

Hemos llegado a la fórmula que queríamos demostrar.

EJERCICIO: Calcular el polinomio  $p(x)$  de interpolación por la fórmula de Newton para la siguiente tabla:

$x_i$	$f(x_i)$
0	1
1	3
3	2

$$\text{Fórmula de Newton} \rightarrow p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

(Calcular las diferencias divididas mediante el algoritmo (tabla) visto anteriormente).



(13/11/2007)

EJERCICIO: Calcular el polinomio  $p(x)$  de interpolación por la fórmula de Newton para la siguiente tabla:

$x_i$	$f(x_i)$
0	1
1	3
3	2

Fórmula de Newton:

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

Como nos dan 3 puntos (datos) distintos, sabemos que existe solución única (por ser todos distintos) y que su grado será, a lo sumo, 2 (porque podemos hallar 3 coeficientes).

Por tanto, la fórmula de Newton para el polinomio buscado será:

$$p_2(x) = \underbrace{f[x_0]}_{?} + \underbrace{f[x_0, x_1]}_{?}(x - x_0) + \underbrace{f[x_0, x_1, x_2]}_{?}(x - x_0)(x - x_1)$$

2º grado

Hay que calcular las diferencias divididas:

$x_i$	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$
0	$\rightarrow f[x_0] = f(x_0) = 1$		
1	$\rightarrow f[x_1] = f(x_1) = 3$	$f[x_0, x_1] = \frac{3-1}{1-0} = 2$	
3	$\rightarrow f[x_2] = f(x_2) = 2$	$f[x_1, x_2] = \frac{2-3}{3-1} = -\frac{1}{2}$	$f[x_0, x_1, x_2] = -\frac{5}{6}$

Coeficientes del polinomio

$$\textcircled{*} f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2} = \frac{2 - (-\frac{1}{2})}{0-3} = -\frac{5}{6}$$

$$p_2(x) = f[0] + f[0, 1](x - 0) + f[0, 1, 3](x - 0)(x - 1)$$

$$p_2(x) = 1 + 2x - \frac{5}{6}x(x-1)$$



Partiendo del ejercicio anterior, supongamos que añadimos un nuevo punto:

$x_i$	$y_i$
2	4

Ahora tengo 4 puntos, lo que me permite saber 4 coeficientes. El polinomio nuevo será de grado 3. Pero no es necesario recalcular todas las diferencias divididas porque se cumple lo siguiente:

$$p_3(x) = p_2(x) + f[0, 1, 3, 2](x-0)(x-1)(x-3)$$

Polinomio  
anterior de  
grado 2

→ Sólo hay que hallar una  
diferencia dividida.

( $p(x) = p(x)$  anterior + "algo")

VENTAJA FUNDAMENTAL DE NEWTON.

## 7.2. OTRA EXPRESIÓN DEL ERROR DE INTERPOLACIÓN.

Anteriormente (pág. 23) habíamos estudiado la siguiente expresión para el error de interpolación:

$$|\mathcal{E}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x-x_0) \dots (x-x_n) \right|$$

Existe otra manera de expresar el error utilizando diferencias divididas:

**ERROR:** Si un polinomio  $p_n(x)$  interpola a una cierta función  $f(x)$  en los puntos del soporte  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$   $x_i \neq x_j \forall i \neq j$ . Entonces, en todo punto  $x$  que no pertenezca al soporte, se cumple:

$$\mathcal{E}(x) = f(x) - p_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x-x_0) \dots (x-x_n)$$

• Demostración:

Supongamos que tenemos una función  $f(x)$ .

Hallamos el polinomio interpolador  $p_n(x)$  en el soporte  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$$\rightarrow p_n(x) / p_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 0..n$$

Ahora añadimos un punto nuevo ( $\xi$ ) al soporte:  $\{x_0, x_1, \dots, x_n, \xi\}$

¿Cuál será el nuevo polinomio interpolador?

$$p_{n+1}(x) / \begin{cases} p_{n+1}(x_i) = f(x_i) & i = 0, \dots, n \\ p_{n+1}(\xi) = f(\xi) \end{cases} \rightarrow \text{Cumple lo de antes más algo adicional.}$$

Fórmula de Newton:

$$p_{n+1}(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] \cdot ((x - x_0) \dots (x - x_n)) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, \xi] \cdot ((x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_n))$$

Hallamos este polinomio en  $x = \xi$ :

$$x = \xi \rightarrow p_{n+1}(\xi) = p_n(\xi) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, \xi] \cdot ((\xi - x_0) \dots (\xi - x_n)) \quad [1]$$

Como  $p_{n+1}(x)$  es el polinomio que interpola a la función  $f(x)$  en todos los puntos del soporte, incluido  $x = \xi$ , tenemos que:

$$p_{n+1}(\xi) = f(\xi) \quad [2]$$

Entonces, a partir de [1] y [2] vemos que:

$$\underbrace{f(\xi) - p_n(\xi)}_{\varepsilon(\xi)} = f[x_0, x_1, \dots, x_n, \xi] (\xi - x_0) \dots (\xi - x_n)$$

$\uparrow$  Esto es lo que queríamos demostrar.

Hasta ahora hemos visto las diferencias divididas  $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$  para el caso en que los puntos del soporte  $\{x_0, \dots, x_n\}$  sean todos distintos 2 a 2. Vamos a ver otros casos:

★ ¿Qué pasa si son iguales? Haré lo siguiente:

Si  $f[x_0, x_0] \rightarrow f[x_0, x_0+h]$  con una "h" muy pequenita.

$$f[x, x+h] = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Definición de derivada

$$f[x, x] = \lim_{h \rightarrow 0} f[x, x+h] = f'(x)$$

suponiendo que  $f \in C^1(x)$

f tiene una derivada (la primera) continua.

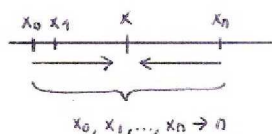
★ ¿ $f[x, \dots, x]$ ? ¿Cómo podemos hallar la diferencia en un punto x que se repite un cierto número de veces?

Nos fijamos en la fórmula del error (estudiada en la pág. 23)

$$\begin{aligned} E(x) &= f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \cdot (x-x_0) \dots (x-x_n) = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0) \dots (x-x_n) \end{aligned}$$

Como los  $x_i$  son distintos, hago que tiendan a x para estudiar el caso que quiero.

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \rightarrow \lim_{x_i \rightarrow x} \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}$$



Si  $f \in C^{n+1}(x)$  entonces  $f[x, \dots, x] = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}$

n+2 veces

f derivable n+1 veces en el punto x.

Derivada de orden n+1.

\* ¿Qué pasa si algunos puntos se repiten, pero no todos?

Por ejemplo,  $f[0,0,1]$ .

En este caso se utiliza la tabla que usábamos para calcular las diferencias divididas anteriormente.

$x_i$	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$
$x_0$	$f(x_0)$		
$x_1$	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$	
$x_1$	$f(x_1)$	$f[x_1, x_1] = f'(x_1)$	$f[x_0, x_1, x_1] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_1]}{x_0 - x_1}$
$x_2$	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_1 - x_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Si fuera  $x_1 = x_2$

NOTA.- Por la fórmula de la pág. anterior, tenemos que:

$$f[x_1, x_1, x_1] = \frac{f''(x_1)}{2!}$$

Utilizar la tabla me permite generalizar las diferencias divididas a casos polinomiales no clásicos, por ejemplo, la Interpolación Polinomial de Taylor.

## 8. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL DE TAYLOR.

Tenemos una función  $y = f(x)$  y un punto  $\{x_0\}$ , que será el único punto del soporte de interpolación. Se conocen también las sucesivas derivadas de  $f(x)$  en el punto  $x_0$ .

Buscamos un polinomio  $p_n(x)$  que cumpla:  $p_n^{(i)}(x) = f^{(i)}(x)$

$$p_n(x_0) = f(x_0)$$

$$p_n'(x_0) = f'(x_0)$$

$$p_n''(x_0) = f''(x_0)$$

⋮

$$p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Polinomio de grado  $n \Rightarrow n+1$  coeficientes.

Es posible derivar hasta  $n$  veces.  $\Leftarrow$

Para resolverlo utilizaré la tabla. Tengo un solo punto en el soporte:  $x_0$ . Lo pongo de esta manera  $\rightarrow S = \{x_0, x_0, \dots, x_0\}$

$n+1$  veces

Es un conjunto, da igual repetir los puntos.

Vamos a hallar el polinomio mediante las diferencias divididas:

$x_i$	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	...
$x_0$	$f(x_0)$			
$x_0$	$f(x_0)$	$f'(x_0)$		
$x_0$	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\frac{f''(x_0)}{2!}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$x_0$	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$\vdots$	$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

En cada columna siempre queda lo mismo.

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$\begin{matrix} \text{"} & \text{"} & & \text{"} \\ f[x_0] & f[x_0, x_0] & f[x_0, x_0, x_0] & f[x_0, \dots, x_0] \\ & & & (n+1) \end{matrix}$

Cumple:

$$p_n^{(i)}(x) = f^{(i)}(x)$$



## 9. INTERPOLACIÓN POLINOMIAL DE HERMITE.

Encontrar el polinomio que interpola a la función  $f(x)$  en los puntos  $\{x_0, \dots, x_n\}$ .

$$\left. \begin{aligned} p_{2n+1}(x_i) &= f(x_i) \\ p'_{2n+1}(x_i) &= f'(x_i) \end{aligned} \right\} i = 0, \dots, n \rightarrow \begin{aligned} &\text{Tengo } 2n+2 \text{ condiciones.} \\ &\text{Puedo hallar } 2n+2 \text{ coeficientes} \\ &(\text{el polinomio será de grado } 2n+1). \end{aligned}$$

$$S = \{ \underbrace{x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n}_{2n+2} \}$$

$x_i$	$f[x_i]$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	...
$x_0$	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$f[x_0, x_0, x_1]$	...
$x_0$	$f(x_0)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_1]$	...
$x_1$	$f(x_1)$	$f'(x_1)$		
$x_1$	$f(x_1)$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$		
$x_n$	$f(x_n)$			

Por ejemplo:

$$\{x_0, x_0, x_1, x_1, x_2\}$$

Cumple:

$$f(x_0) = p(x_0)$$

$$f'(x_0) = p'(x_0)$$

$$f(x_1) = p(x_1)$$

$$f'(x_1) = p'(x_1)$$

$$f(x_2) = p(x_2)$$

El polinomio será:

$$\begin{aligned} p_{2n+1}(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_0](x-x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x-x_0)^2 + \\ &+ f[x_0, x_0, x_1, x_1](x-x_0)^2(x-x_1) + \dots + \\ &+ \dots + f[x_0, x_0, \dots, x_n, x_n]((x-x_0)^2(x-x_1)^2 \dots (x-x_{n-1})^2(x-x_n)) \end{aligned}$$



\* PROBLEMA 8.

Consideremos la función  $f(x) = \ln(x)$  y su polinomio interpolador en  $\{x_0, x_1\}$ .

$\hookrightarrow n=1$

Definida para  $x > 0$

- (a) Demostrar que el error cometido en cualquier punto del intervalo  $[x_0, x_1]$  está acotado por:

$0 < x_0 < x_1$

$$e(x) \leq \frac{(x_1 - x_0)^2}{8x_0^2}$$

Conocemos 2 expresiones para el error. Usamos la más apropiada para este problema:

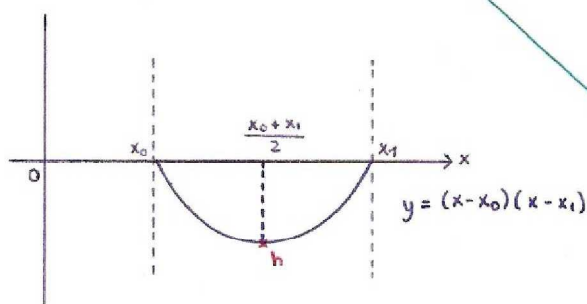
$$e(x) = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x-x_0) \dots (x-x_n) \right|$$

En nuestro caso  $\rightarrow n=1$

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} ; \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} \end{aligned} \right\} e(x) = \left| \frac{-1/\xi_x^2}{2} (x-x_0)(x-x_1) \right| =$$

$$= \frac{1}{2\xi_x^2} |(x-x_0)(x-x_1)| \leq \frac{1}{2x_0^2} |(x-x_0)(x-x_1)| \leq \frac{1}{2x_0^2} h =$$

$\hookrightarrow$  Valor absoluto de la imagen en la parábola en el punto medio del intervalo  $[x_0, x_1]$

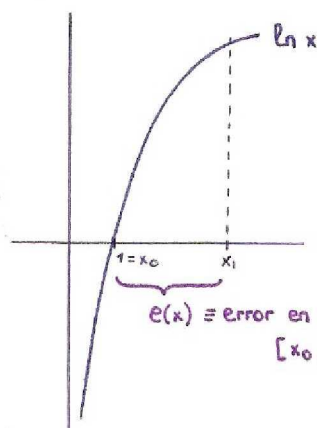


Como el punto  $\xi$  está en el intervalo,  $x_0 \leq \xi \leq x_1$ . Así que lo podemos acotar superiormente poniendo algo más pequeño en el denominador.

$$x_0^2 \leq \xi_x^2 \quad 0 \leq \xi_x \leq x_1$$

$$= \frac{1}{2x_0^2} \left| \underbrace{\left( \frac{x_0+x_1}{2} - x_0 \right) \left( \frac{x_0+x_1}{2} - x_1 \right)}_h \right| = \frac{1}{2x_0^2} \left| \frac{x_1-x_0}{2} \cdot \frac{x_0-x_1}{2} \right| = \frac{1}{2x_0^2} \cdot \frac{(x_1-x_0)^2}{4}$$

- Si tomamos  $x_0 = 1$ , ¿hasta dónde podremos extender el intervalo asegurando un error menor que  $10^{-4}$ ?



$$\ln(1) = 0$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1?$$

$$\rightarrow e(x) < 10^{-4}$$

Utilizaré la cota de error que acabo de hallar:

$$e(x) \leq \frac{(x_1 - x_0)^2}{8x_0^2} < 10^{-4}$$

Despejar  $x_1$

$$\frac{(x_1 - 1)^2}{8} < 10^{-4} ; (x_1 - 1)^2 < 8 \cdot 10^{-4} ; x_1 - 1 < \sqrt{8 \cdot 10^{-4}}$$

$$\parallel$$

$$2\sqrt{2} \cdot 10^{-2}$$

$$x_1 < 2\sqrt{2} \cdot 10^{-2} + 1 = \frac{2\sqrt{2}}{10^2} + 1$$

1 y un piquito  $\rightarrow$  El intervalo es muy pequeño  $\approx (1, 1.02)$

Podemos extendernos

hasta este punto (sin llegar a él).

- ¿Y si partimos de  $x_0 = 100$ ? ¿Tendré un intervalo mejor (más amplio)?

$$\frac{(x_1 - 100)^2}{8 \cdot 100^2} < 10^{-4} ; (x_1 - 100)^2 < 10^{-4} \cdot 8 \cdot 10^4 ;$$

$$\parallel$$

$$100^2$$

$$x_1 - 100 < \sqrt{8}$$

$$\parallel$$

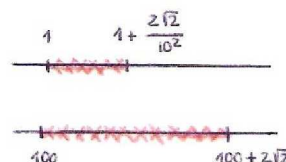
$$2\sqrt{2}$$

$$x_1 < 100 + 2\sqrt{2}$$

$\rightarrow$  El intervalo será  $\approx (100, 102.8)$

La situación ha mejorado:

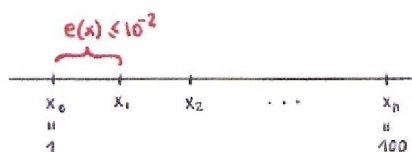
La amplitud del intervalo es 100 veces la anterior para esperar el mismo error.



El error depende del intervalo

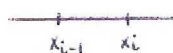
(b)  $f(x) = \ln x$        $e(x) \leq 10^{-2}$        $\hat{x}_n$ ?

Vamos a interpolar en el intervalo  $[1, 100]$



Queremos garantizar que en todos los intervalos  $[x_{i-1}, x_i] \subset [1, 100]$  el error sea menor que  $10^{-2}$ .

$$e(x) = \frac{(x_1 - x_0)^2}{8x_0^2} \ll 10^{-2}$$



$$e(x) = \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{8x_{i-1}^2} \leq 10^{-2}$$

Cota del  
error

→  $(x_i - x_{i-1})^2 \leq 10^{-2} \cdot 8 \cdot x_{i-1}^2$  ; Positivos y mayores que 1

$$x_i \leq x_{i-1} + 10^{-1} \cdot 2\sqrt{2} \cdot x_{i-1}$$

$$x_i \leq x_{i-1} \underbrace{\left(1 + 10^{-4} \cdot 2\sqrt{2}\right)}_{\delta}$$

Factor común

$$x_1 \leq x_0 \cdot \delta, \quad x_2 \leq x_1 \cdot \delta \leq x_0 \delta^2, \dots, \quad x_n \leq x_0 \delta^n = \delta^n$$

$\begin{array}{c} \text{ii} \\ 100 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ii} \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{ii} \\ n \end{array}$

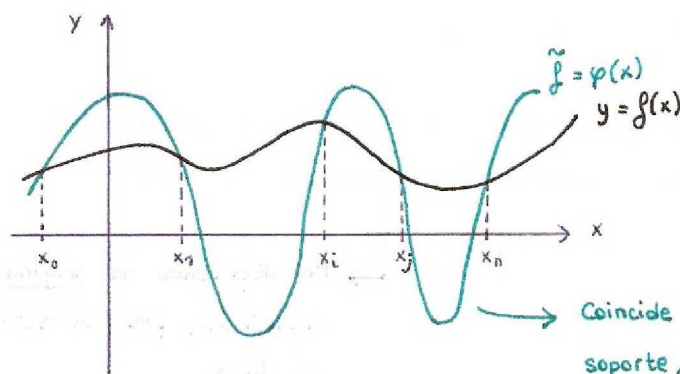
$$x_i = \delta^i$$

## TEMA 2.2 : INTERPOLACIÓN CON SPLINES. (16/11/2007)

Hasta ahora, la forma que teníamos de interpolar era la siguiente:

Tenemos una serie de puntos (soporte)  $\rightarrow \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Queremos buscar la función  $P(x)$  que interpole a cierta función  $f(x)$ ; es decir, buscamos  $P(x)$  tal que  $P(x_i) = y_i \quad i = 0, \dots, n$



$$P \in \mathcal{P}_n \quad P(x) = p_n(x)$$



Buscamos un polinomio.

$$|\varepsilon(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \right| \cdot \underbrace{|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|}_{g_{n+1}(x)} \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \leq M \quad \quad \quad \downarrow x^{n+1} + x^n + \dots \\ \text{Error de interpolación.}$$

Hasta ahora, siempre que hemos hecho una interpolación teníamos una serie de condiciones que expresábamos a través de un conjunto de funciones lineales. Con ellas generábamos un sistema de ecuaciones que nos permitía seleccionar un único elemento perteneciente al espacio en que exigíamos que se encontrase la solución. En el caso de la Interpolación Polinomial Clásica teníamos que el espacio era  $\mathcal{P}_n$  (polinomios de grado  $\leq n$ ) y que las funciones expresaban la condición de "pase por los puntos"  $(x_i, f(x_i)) \quad i = 0, \dots, n$

Sin embargo, esa manera de interpolar tiene algunos inconvenientes. En particular tenemos el problema de que, a medida que aumenta el grado del polinomio (es decir, a medida que nos dan más puntos  $x_i$  del soporte), dicho polinomio tiende a oscilar mucho.

¿Cómo podemos solucionar esto?  $\rightarrow$

**SPLINES = INTERPOLACIÓN  
SEGMENTARIA.**

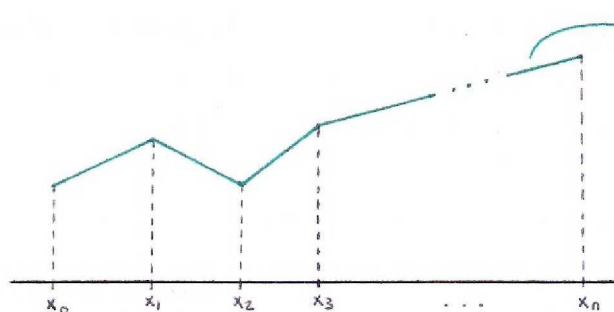
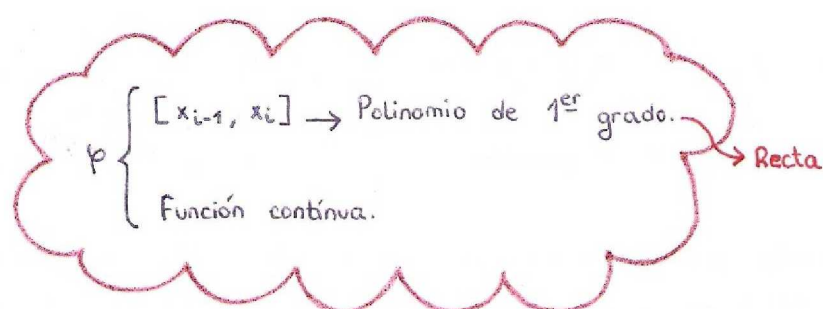
**Interpolación Segmentaria** → En lugar de obtener un solo polinomio basado en  $n+1$  puntos, dividimos nuestro intervalo en trozos más pequeños, cada uno con menos puntos y hacemos pasar por ellos un polinomio de grado menor. A estos polinomios les imponemos condiciones de modo que se conecten entre ellos de manera suave (continua). Vamos a ver diferentes casos de I. Segmentaria.

## 1. SPLINES DE PRIMER GRADO.

Tenemos el soporte  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Buscamos una función  $P$  asociada al soporte dado. Por cada dos puntos consecutivos se hace pasar una recta que los conecta.

→ No disponemos de ninguna libertad para imponer condiciones, pues la recta que pasa por 2 puntos es única.



→ Los polinomios son distintos, pero son continuos. Resulta una línea quebrada.



## 2. SPLINES DE SEGUNDO GRADO.

Tenemos el soporte  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Buscamos una función  $\varphi$  asociada al soporte dado. Por cada dos puntos consecutivos se hace pasar una parábola.

$\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

1º)  $\varphi|_{[x_{i-1}, x_i]}$  es un polinomio de 2º grado.

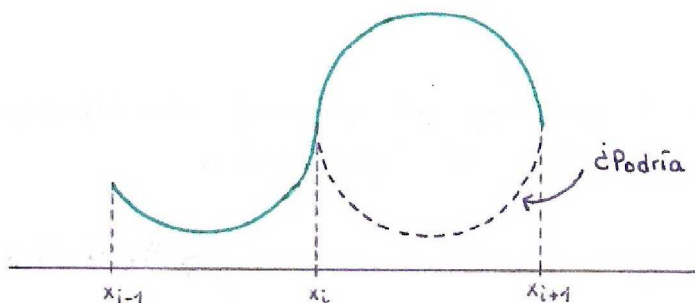
2º)  $\varphi$  es "lo más regular posible".

→ Parábola.

Tenemos 3 parámetros y solo 2 puntos.



Hay que imponer 1 condición adicional: CONTINUIDAD EN LA PRIMERA DERIVADA.



¿Podría poner esta parábola?

No, porque quiero una derivable y continua con la anterior.

## 3. SPLINES DE GRADO M. (En general)

Sea  $\varphi$  definida en  $[a, b]$ , donde establecemos una partición con  $n$  intervalos  $[x_{i-1}, x_i]$  de forma que:  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$   
 $\varphi$  cumple lo siguiente:

1º)  $\varphi|_{[x_{i-1}, x_i]}$  es un polinomio de grado  $m$ .

2º)  $\varphi \in C^{m-1}[a, b]$  (Tiene  $m-1$  derivadas continuas)

$\varphi(x)$  "lo más regular posible".

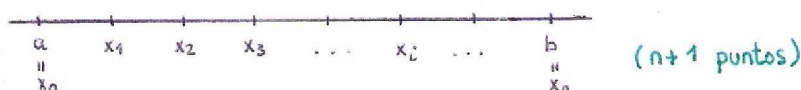


#### 4. ¿CÓMO DETERMINAR LOS SPLINES?

\* Determinar un SPLINE de GRADO 2.

Sea  $\varphi(x)$  un spline de 2º grado asociado a la partición  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de  $[a, b]$ .

↳ Dos puntos consecutivos se unen mediante un polinomio de grado 2.



$$\begin{aligned} \rightarrow \varphi(x) &= a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{¿} a_i, b_i, c_i? \\ &\quad | [x_{i-1}, x_i] \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ intervalos}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{3n \text{ parámetros}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \varphi'(x) = 2a_i x + b_i \quad | [x_{i-1}, x_i]$$

Para hallar el spline hay que determinar los coeficientes  $a_i, b_i, c_i$  sabiendo que tiene que ser lo más regular posible.

Vamos a exigir lo siguiente:

1º) Tiene que ser CONTÍNUA en  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  (\*)

↓  
n-1 puntos

←  
n-1 condiciones para  
determinar 3n parámetros

2º)  $\varphi'(x)$  CONTÍNUA en  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$

↓  
n-1 puntos

←  
Otras n-1 condiciones

En el resto de puntos seguro que es continua porque los polinomios lo son.

} 2n-2 condiciones

(\*) En  $x_0$  y  $x_n$  no puedo exigir continuidad porque no sé lo que hay a la izquierda de  $x_0$  y a la derecha de  $x_n$ .

3º) Además impongo las condiciones de interpolación:

$$y = f(x) \quad , \quad \varphi(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n \rightarrow n+1 \text{ condiciones.}$$

En resumen:

$$\text{Exigir } \begin{cases} \text{Continuidad } \varphi(x) & (n-1 \text{ condiciones}) \\ \text{Continuidad } \varphi'(x) & (n-1 \text{ condiciones}) \\ \text{Condiciones de interpolación.} & (n+1 \text{ condiciones}) \end{cases}$$

**3n - 1 CONDICIONES PARA DETERMINAR**

**3n PARÁMETROS.**

**1 GRADO DE LIBERTAD.**

↳ Este grado de libertad que nos queda se usa para ajustar el spline al problema.  
(Ej: ... sabiendo que  $\varphi$  vale "tanto" en "tal" punto).

\* Determinar un SPLINE de GRADO 3.

Sea  $\varphi$  un spline de 3º grado.

$$\begin{cases} \varphi(x) \text{ spline de 3º grado.} \\ y = f(x) \text{ función que queremos interpolar.} \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1 & x \in [x_0, x_1] \\ a_2 x^3 + b_2 x^2 + c_2 x + d_2 & x \in [x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots \\ a_n x^3 + b_n x^2 + c_n x + d_n & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Ahora tenemos:

$n$ intervalos $[x_{i-1}, x_i]$	$i = 1, 2, \dots, n$	} $4n$ parámetros
$4$ parámetros $(a_i, b_i, c, d_i)$ por intervalo		

1º)  $\varphi(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n \rightarrow n+1$  condiciones de interpolación.

2º)  $\varphi(x)$  continua en  $x_i$   $i = 1, \dots, n-1 \rightarrow n-1$  condiciones de continuidad.

3º)  $\varphi'(x)$  continua en  $x_i$   $i = 1, \dots, n-1 \rightarrow n-1$  condiciones.

4ª)  $\varphi''(x)$  continua en  $x_i$   $i = 1, \dots, n-1 \rightarrow n-1$  condiciones.

↪ No derivar más. Se puede exigir hasta aquí porque la siguiente derivada ya sería una constante.

4n-2 CONDICIONES PARA DETERMINAR  
4n PARÁMETROS.  
2 GRADOS DE LIBERTAD.

Estos 2 grados de libertad se usan para imponer condiciones particulares del problema. Lo más común son los splines cúbicos naturales.

Splines Cúbicos Naturales  $\rightarrow$  Cumple:  $\varphi'''(a) = \varphi'''(b) = 0$

LOS MÁS IMPORTANTES SON  
LOS SPLINES DE 1<sup>er</sup> Y 3<sup>er</sup> GRADO  
PORQUE DAN MEJOR RESULTADO QUE  
LOS DE GRADO PAR.

EJEMPLO : Sea  $S_h(x)$  el spline cúbico que interpola la tabla:

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$(n=2)$
$x_i$	-1	0	1	
$y_i$	0	0	h	

tal que  $S_h''(-1) = S_h''(1) = 0$

→ 2 condiciones adicionales.

↪ Parámetro (para cada valor de  $h$  tendré un spline diferente).

a) Calcular el valor de  $h$  para que  $S_h''(0) = 1$ .

b) Sea  $h^*$  el valor hallado en el apartado anterior.  
Calcular  $S_{h^*}'(0)$  y  $S_{h^*}'(1)$ .

①  $S_h(x)$  spline cúbico. 3 puntos → 2 intervalos.

$$S_h(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & x \in [-1, 0] \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$S_h'(x) = \begin{cases} 3a_1x^2 + 2b_1x + c_1 & x \in [-1, 0] \\ 3a_2x^2 + 2b_2x + c_2 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$S_h''(x) = \begin{cases} 6a_1x + 2b_1 & x \in [-1, 0] \\ 6a_2x + 2b_2 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

CONDICIONES DE CONTINUIDAD:

↪  $x_1$ : Continua en el punto no extremo del soporte. ↪  $x_0$  y  $x_n$

\*  $S_h$  continua en  $x=0 \rightarrow S_h(0)^- = S_h(0)^+ \rightarrow \boxed{d_1 = d_2}$

\*  $S_h'$  continua en  $x=0 \rightarrow S_h'(0)^- = S_h'(0)^+ \rightarrow \boxed{c_1 = c_2}$

\*  $S_h''$  continua en  $x=0 \rightarrow S_h''(0)^- = S_h''(0)^+ \rightarrow \boxed{b_1 = b_2}$

Tenemos 5 parámetros ( $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2$ )

Tenemos 5 ecuaciones (3 condiciones de interpolación + 2 condiciones adicionales (enunciado))

} Resolver.

(20/11/2007)

## 5. SPLINES CÚBICOS.

La filosofía básica es idéntica que en los splines anteriormente estudiados, aunque ahora utilizaremos parábolas cúbicas (polinomios de grado 3) entre cada dos puntos consecutivos.

Tenemos el soporte  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Spline  
que queremos  
encontrar.

$$S(x) = \begin{cases} \underbrace{a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1}_{S_1(x)} & x \in [x_0, x_1] \\ \vdots \\ \underbrace{a_n x^3 + b_n x^2 + c_n x + d_n}_{S_n(x)} & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

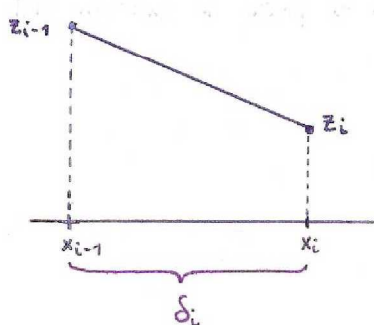
Se trata de hallar estos polinomios (calcular los coeficientes). Hacerlo como en la clase anterior puede ser muy pesado, por lo que vamos a ver otra forma de calcular  $S(x)$ :

$\{S_i(x)\}$  son polinomios de grado 3.

$\{S'_i(x)\}$  son polinomios de grado 2.

$\{S''_i(x)\}$  son polinomios de grado 1: Rectas

Por tanto, la derivada segunda del spline cúbico es una recta y tendrá el siguiente aspecto:



$$S''(x_{i-1}) = z_{i-1}$$

$$S''(x_i) = z_i$$

Llamaremos  $z_i$  a los valores que toma esta función en los  $n+1$  puntos del soporte.

Por ahora desconozco el valor de estos  $z_i$ .

$$S''_i(x) = S''(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$



$S''(x)$  tendrá la ecuación de una recta que pasa por 2 puntos.  
Para encontrar una expresión de  $S''(x)$  utilizamos la fórmula de interpolación de Lagrange:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot l_i(x) \quad \text{donde} \quad l_i(x) = \prod_{j=0, \dots, n, j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

En nuestro caso  $\rightarrow n=1 \quad x_0 = x_{i-1} \quad x_1 = x_i$

$$p_1(x) = f(x_0) \cdot l_0(x) + f(x_1) \cdot l_1(x)$$

$$S''(x) = S''_i(x) = \underbrace{\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i}}_{-\delta_i} \cdot z_{i-1} + \underbrace{\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}_{\delta_i} \cdot z_i$$

Vemos que cuando  $x = x_i$  se anula parte de la fórmula y queda  $S''_i(x_i) = z_i$ . Cuando  $x = x_{i-1}$  se anula otra parte de la fórmula y queda  $S''_i(x_{i-1}) = z_{i-1}$ .

Por tanto, está bien (es una recta que pasa por los 2 puntos deseados).

Ahora integramos dos veces para obtener  $S_i(x)$ :

$$S'_i(x) = \frac{(x - x_i)^2}{-2\delta_i} \cdot z_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2}{2\delta_i} \cdot z_i + C_i$$

$$S_i(x) = \frac{(x - x_i)^3}{-6\delta_i} \cdot z_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6\delta_i} \cdot z_i + C_i x + D_i$$

Cambiando las constantes de integración puede escribirse de forma más conveniente:

→ Cambio el signo para quitar el -

$$S_i(x) = \frac{(x_i - x)^3}{6\delta_i} \cdot z_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6\delta_i} \cdot z_i + A_i(x - x_{i-1}) + B_i(x_i - x)$$

Para determinar las constantes de integración ( $A_i$  y  $B_i$ ) se impone que el polinomio debe valer lo que la función a interpolar en los puntos  $x_i$  y  $x_{i-1}$ .



Punto por el que quiero que pase el spline.

$$\left. \begin{aligned} S_i(x_{i-1}) &= y_{i-1} = \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{6\delta_i} \cdot z_{i-1} + B_i(x_i - x_{i-1}) \\ S_i(x_i) &= y_i = \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{6\delta_i} \cdot z_i + A_i(x_i - x_{i-1}) \end{aligned} \right\} \rightarrow A_i, B_i$$

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{y_{i-1} - \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{6\delta_i} \cdot z_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y_{i-1}}{\delta_i} - \frac{\delta_i z_{i-1}}{6} \\ A_i &= \frac{y_i - \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{6\delta_i} \cdot z_i}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y_i}{\delta_i} - \frac{\delta_i z_i}{6} \end{aligned}$$

Para calcular  $A_i$  y  $B_i$  para todos los intervalos sólo necesito saber los valores de la segunda derivada en cada punto  $x_i$  (lo que hemos llamado  $z_i$ ). Los  $y_i$  y  $y_{i-1}$  son datos del problema.

Por tanto, la expresión del spline que buscamos es:

Se conoce  $\rightarrow$   
todo menos  
los  $z_i$ .

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \frac{z_{i-1}}{6\delta_i} (x_i - x)^3 + \frac{z_i}{6\delta_i} (x - x_{i-1})^3 + \left( \frac{y_i}{\delta_i} - \frac{z_i \delta_i}{6} \right) (x - x_{i-1}) + \\ &+ \left( \frac{y_{i-1}}{\delta_i} - \frac{z_{i-1} \delta_i}{6} \right) (x_i - x) \end{aligned} \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

SPLINE CÚBICO QUE INTERPOLA A LA FUNCIÓN  $y = f(x)$  EN LOS PUNTOS DEL SOPORTE  $\{x_0, \dots, x_n\}$

Un  $S_i(x)$  para cada intervalo

$$z_j = S''(x_j)$$

$$y_j = S(x_j)$$

¿Cómo podemos calcular los  $z_i$ ?

Para calcular los  $z_i$  exigiremos continuidad de la primera derivada:

$$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i)$$

Calculamos la primera derivada:

$$S'_i(x) = -\frac{z_{i-1}}{2\delta_i} (x_i - x)^2 + \frac{z_i}{2\delta_i} (x - x_{i-1})^2 + \left( \frac{y_i}{\delta_i} - \frac{z_i \delta_i}{6} \right) - \left( \frac{y_{i-1}}{\delta_i} - \frac{z_{i-1} \delta_i}{6} \right)$$

$$S'_i(x_{i-1}) \rightarrow S'_{i+1}(x_i)$$

$$S'_i(x_i) = -\frac{z_i}{2} \delta_i + \frac{y_i}{\delta_i} - \frac{y_{i-1}}{\delta_i} - \frac{z_i \delta_i}{6} + \frac{z_{i-1} \delta_i}{6}$$

$$S'_i(x_{i-1}) = -\frac{z_{i-1}}{2} + \frac{y_i}{\delta_i} - \frac{y_{i-1}}{\delta_i} - \frac{z_i \delta_i}{6} + \frac{z_{i-1} \delta_i}{6}$$

$$S'_{i+1}(x_i) = -\frac{z_i}{2} \delta_{i+1} + \frac{y_{i+1}}{\delta_{i+1}} - \frac{y_i}{\delta_{i+1}} - \frac{z_{i+1} \delta_{i+1}}{6} + \frac{z_i \delta_{i+1}}{6}$$

Es lo mismo pero cambiando "i" e "i-1" por "i+1" e "i" respectivamente.

→ Son la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha.  
Para que haya continuidad deben ser iguales.

Igualando ambas expresiones se obtiene:

$$\frac{z_i}{2} \delta_i - \frac{z_i}{6} \delta_i + \frac{z_{i-1}}{6} \delta_i + \frac{z_i}{2} \delta_{i+1} + \frac{z_{i+1}}{6} \delta_{i+1} - \frac{z_i \delta_{i+1}}{6} = \overbrace{\frac{y_{i+1}}{\delta_{i+1}} - \frac{y_i}{\delta_{i+1}} - \frac{y_i}{\delta_i} + \frac{y_{i-1}}{\delta_i}}^{\text{conocido}}$$

para  $i = 1 \dots n-1$

→ Dejamos en el primer miembro todos los  $z_i$  y en el segundo lo demás.

La continuidad se puede exigir en los puntos interiores, en  $x_0$  y  $x_n$  no.

Operamos:

$$\frac{z_{i-1}}{6} \delta_i + \frac{\delta_i}{3} z_i + \frac{\delta_{i+1}}{3} z_i + \frac{z_{i+1}}{6} \delta_{i+1} = \frac{y_{i-1}}{\delta_i} - \left( \frac{1}{\delta_i} + \frac{1}{\delta_{i+1}} \right) y_i + \frac{y_{i+1}}{\delta_{i+1}} \quad i=1, \dots, n-1$$

$$\frac{\delta_i}{6} z_{i-1} + \frac{\delta_i + \delta_{i+1}}{3} z_i + \frac{\delta_{i+1}}{6} z_{i+1} = \frac{y_{i-1}}{\delta_i} - \left( \frac{1}{\delta_i} + \frac{1}{\delta_{i+1}} \right) y_i + \frac{y_{i+1}}{\delta_{i+1}}$$

$$i = 1, \dots, n-1$$

TENEMOS  $n-1$  ECUACIONES  
Y  $n+1$  INCÓGNITAS } 2 grados de libertad  
 $\downarrow$   
 $z_0, z_1, \dots, z_n$

Con este sistema incompleto podemos hallar  $z_1, \dots, z_{n-1}$  (puntos interiores). Las 2 condiciones que nos faltan para completar el sistema nos las dan en el enunciado. Lo más común es que estas condiciones

sean:

$$z_0 = z_n = 0 \quad \text{Spline cúbico Natural}$$

Recordemos que  $z_i = S_i''(x)$

\* EJEMPLO: Construir el spline cúbico natural  $S(x)$  que interpola la siguiente tabla:

$x_i$	0	1	2	3	4
$y_i$	1	2	4	0	-10

$S(x)$  cumple:

$$S''(0) = 0 \quad z_0 = 0$$

$$S''(4) = 0 \quad z_4 = 0$$

$n=4 \rightarrow 4$  intervalos

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4 \rightarrow x_i = i \quad i = 0, \dots, 4$$

$$\delta_i = x_i - x_{i-1} = 1$$

$\delta_i = 1$  para todos los intervalos, eso nos simplificará bastante.

Para hallar los  $z_i$  utilizo la fórmula [1] de la página anterior. Sustituyo  $\delta_i$ :

$$\frac{z_{i-1}}{6} + \frac{2}{3} z_i + \frac{z_{i+1}}{6} = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} \quad i = 1, 2, 3$$

$$\left. \begin{aligned} i=1 : \quad \frac{z_0}{6} + \frac{2}{3} z_1 + \frac{z_2}{6} &= 1 - 2 \cdot 2 + 4 \\ i=2 : \quad \frac{z_1}{6} + \frac{2}{3} z_2 + \frac{z_3}{6} &= 2 - 2 \cdot 4 + 0 \\ i=3 : \quad \frac{z_2}{6} + \frac{2}{3} z_3 + \frac{z_4}{6} &= 4 - 2 \cdot 0 - 10 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (x6) \\ (x6) \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} z_0 + 4z_1 + z_2 &= 6 \\ z_1 + 4z_2 + z_3 &= -36 \\ z_2 + 4z_3 + z_4 &= -36 \end{aligned} \right\}$$

Por el enunciado sabemos que  $z_0 = z_4 = 0$ . Matricialmente queda:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -36 \\ -36 \end{pmatrix} \rightarrow \text{fácilmente se calculan } z_1, z_2 \text{ y } z_3$$

Ya tenemos todos los datos. Simplemente hay que sustituir en la fórmula del spline cúbico [2]

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = \frac{z_0}{6}(1-x)^3 + \frac{z_1}{6}(x-0)^3 + \left(2 - \frac{z_1}{6}\right)(x-0) + \left(1 - \frac{z_0}{6}\right)(1-x) & x \in [0, 1] \\ S_2(x) = \dots & x \in [1, 2] \\ S_3(x) = \dots & x \in [2, 3] \\ S_4(x) = \dots & x \in [3, 4] \end{cases}$$

\* EJERCICIO: Obtener el spline cúbico que interpola la tabla:

$x_i$	-1	1	2	3
$y_i$	0	1	1	2

$\rightarrow$  3 intervalos  
 $n = 3 \quad i = 1, 2$   
 $\delta_1 = 2 \quad \delta_2 = \delta_3 = 1$

Para hallar los  $z_i$  usamos, como siempre, la fórmula [1]

$$\left. \begin{aligned} i=1 : \quad \frac{1}{3} z_0 + \frac{2+1}{3} z_1 + \frac{1}{6} z_2 &= \frac{0}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) \cdot 1 + \frac{1}{1} \\ i=2 : \quad \frac{1}{6} z_1 + \frac{2}{3} z_2 + \frac{1}{6} z_3 &= \frac{1}{1} - 2 \cdot 1 + 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{z_0}{3} + z_1 + \frac{z_2}{6} &= -\frac{1}{2} \\ \frac{z_1}{6} + \frac{2z_2}{3} + \frac{z_3}{6} &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} (x6) \\ (x6) \end{matrix}$$

$$\left. \begin{aligned} 2z_0 + 6z_1 + z_2 &= -3 \\ z_1 + 4z_2 + z_3 &= 6 \end{aligned} \right\}$$



Hasta aquí, la resolución del problema es común a todos los apartados:  $z_1$  y  $z_2$  se hallan igual. Para calcular  $z_0$  y  $z_3$  me tengo que fijar en las condiciones que me da el enunciado.

$$\textcircled{a} \quad S''(-1) = S''(3) = 0$$

$$\quad \quad \quad \parallel \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad z_0 \quad \quad z_3$$

Como  $z_0 = z_3 = 0$ , el sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} 6z_1 + z_2 = -3 \\ z_1 + 4z_2 = 6 \end{array} \right\} \quad (x4) \quad \left. \begin{array}{l} 24z_1 + 4z_2 = -12 \\ z_1 + 4z_2 = 6 \end{array} \right\}$$

$$23z_1 = -18$$

$$z_1 = \frac{-18}{23}$$

$$z_2 = -3 - 6\left(\frac{-18}{23}\right)$$

$$z_2 = \frac{39}{23}$$

Finalmente, queda sustituir en la fórmula del spline cúbico  $\boxed{2}$

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{18}{23} = \frac{1}{6 \cdot 2} (x+1)^3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{(-18/23)}{3}\right)(x+1) & x \in [-1, 1] \\ \frac{(-18/23)}{6} (2-x)^3 + \frac{(39/23)}{6} (x-1)^3 + \left(1 - \frac{(39/23)}{6}\right)(x-1) + \left(1 - \frac{(-18/23)}{6}\right)(2-x) & x \in [1, 2] \\ \frac{39/23}{6} (3-x)^3 + (2-0)(x-2) + \left(1 - \frac{(39/23)}{6}\right)(3-x) & x \in [2, 3] \end{cases}$$

$$\quad \quad \quad i=1 \quad \quad \quad i=2 \quad \quad \quad i=3$$

$$\textcircled{b} \quad S'(-1) = 0, \quad S'(3) = 2$$

$$\textcircled{c} \quad S''(-1) = 0, \quad S''(3) = 0$$

(23/11/2007)

\* EJERCICIO 5.

Sea  $S(x)$  el spline de grado 1 que interpola a  $f(x)$  en los puntos  $x_i = i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$

Se consideran los splines de grado 1 que cumplen:

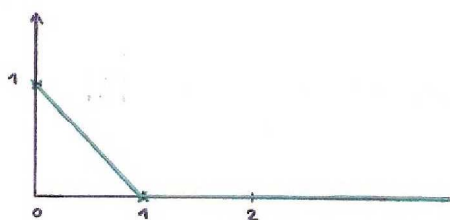
$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

a) Dibujar y expresar analíticamente los splines  $\phi_i(x)$ .

$$\phi_0(x_0) = \phi_0(0) = 1$$

$$\phi_0(x_i) = \phi_0(i) = 0 \quad \forall i \neq 0$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$



La expresión analítica diferenciará dos tramos  $\rightarrow$  Una recta en  $[0, 1]$  y 0 en el resto.

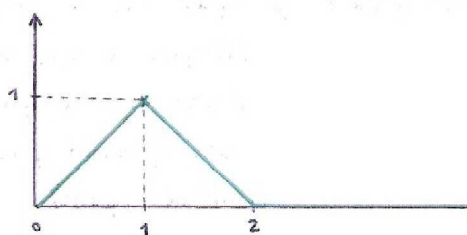
$$\rightarrow \frac{x-0}{1-0} = \frac{y-1}{0-1} \rightarrow y = -x + 1$$

Ecuación de una recta  
que pasa  
por dos puntos

$$\rightarrow \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$

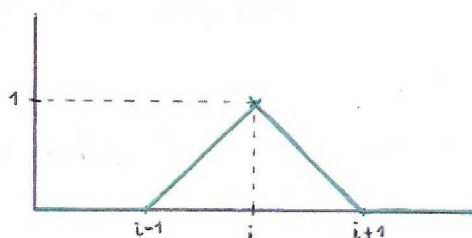
$$\phi_0(x) = \begin{cases} -x + 1 & , x \in [0, 1] \\ 0 & , x \in [1, n] \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(0) = \phi_1(2) = \phi_1(3) = \dots = \phi_1(n) = 0 \\ \phi_1(1) = 1 \end{aligned} \right\}$$



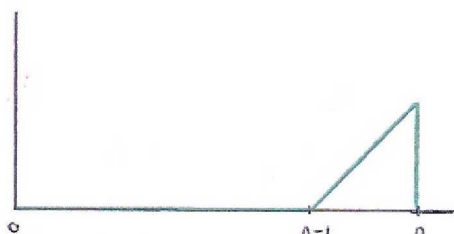
$$\phi_1(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ -x + 2 & x \in [1, 2] \\ 0 & x \in [2, n] \end{cases}$$

Vemos que en general, ahora sucederá:



$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, i-1] \\ x+1-i & x \in [i-1, i] \\ -x+1+i & x \in [i, i+1] \\ 0 & x \in [i+1, n] \end{cases}$$

Finalmente:



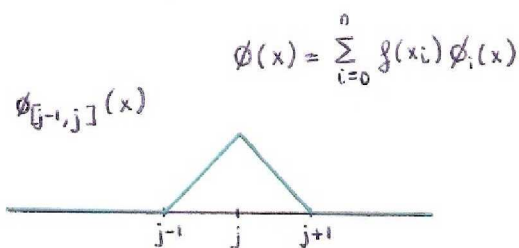
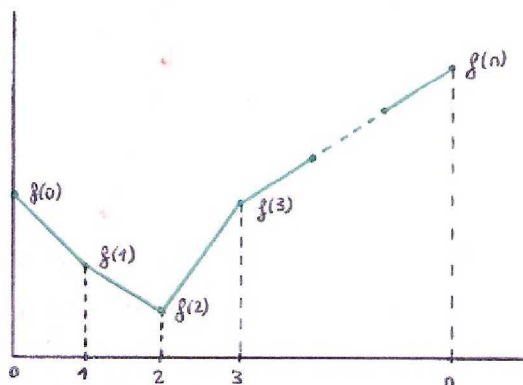
$$\phi_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, n-1] \\ x+1-n & x \in [n-1, n] \end{cases}$$

Se hallan con la ec. de la recta que pasa por 2 puntos

(b) Demostrar que el spline  $S(x)$  admite la expresión:

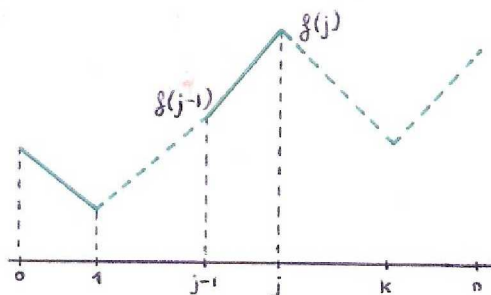
$$S(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \phi_i(x)$$

¿Spline de 1<sup>er</sup> grado? → Spline de 1<sup>er</sup> grado que interpole a  $f(x)$  sólo hay 1.  
Basta con comprobar que esta fórmula pasa por los mismos puntos.



$$x \in [j-1, j] \rightarrow \phi(x) = \underbrace{f(x_{j-1}) \phi_{j-1}(x) + f(x_j) \phi_j(x)}_{\text{Recta}} \leftarrow \text{Lo demás se anula.}$$

Para que sea un spline hay que comprobar que sea continuo. Para ello hay que comprobar la imagen del spline:

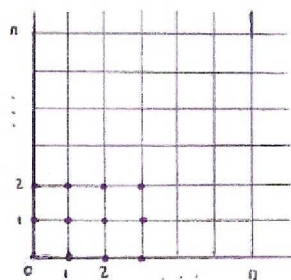


$$\begin{aligned} \phi(x_k) &= \phi(k) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \phi_i(x_k) = \\ &= f(x_k) \underbrace{\phi_k(k)}_1 = f(x_k) \end{aligned}$$

$\begin{cases} i=k \rightarrow 1 \\ i \neq k \rightarrow 0 \end{cases}$

Es una poligonal que pasa por los puntos que queremos. Hemos demostrado al mismo tiempo que es un spline (por ser continuo) y que interpola a  $f$  (porque pasa por los mismos puntos).

- © Tenemos el spline de grado 1  $S(x, y)$  que interpola a la función  $g(x, y)$  en los puntos  $(x_i, y_j) = (i, j)$

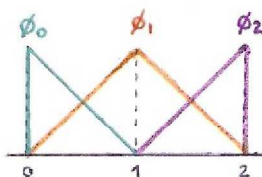


$$S(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n g(x_i, y_j) \phi_i(x) \phi_j(y)$$

Construir el spline  $S(x, y)$  que interpole:

$x_i \backslash y_j$	0	1	2
0	0	1	0
1	1	2	1
2	0	1	0

$i = 0, 1, 2$



Simplemente hay que sustituir:

$$\begin{aligned}
 S(x, y) &= \overbrace{g(0,1)}^1 \cdot \phi_0(x) \phi_1(y) + \overbrace{g(1,0)}^1 \cdot \phi_1(x) \phi_0(y) + \overbrace{g(1,1)}^2 \cdot \phi_1(x) \phi_1(y) + \\
 &\quad + \underbrace{g(1,2)}_1 \cdot \phi_1(x) \phi_2(y) + \underbrace{g(2,1)}_1 \cdot \phi_2(x) \phi_1(y) = \rightarrow \text{Sólo pongo los que no} \\
 &= \phi_0(x) \phi_1(y) + \phi_1(x) \phi_0(x) + 2 \phi_1(x) \phi_1(y) + \text{son 0 en la tabla} \\
 &\quad + \phi_1(x) \phi_2(y) + \phi_2(x) \phi_1(y) \text{ porque ya sé que si} \\
 &\quad \text{son 0 se anulan.}
 \end{aligned}$$

$$S(x, y) = \begin{cases} \phi_1(x) \phi_1(y) & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] & i=1 \quad j=1 \\ \phi_1(x) \phi_2(y) & (x, y) \in [0, 1] \times [1, 2] & i=1 \quad j=2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{cases}$$

[Ejercicios 3 y 4 (c no)]



(27/11/2007)

\* EJERCICIO 3.

Sea  $\Delta$  partición de  $[-1, 1] \rightarrow \Delta = \left\{ \underset{x_0}{-1}, \underset{x_1}{0}, \underset{x_2}{1} \right\}$

Sea  $T_2 = \{ f / f|_{[-1,0]}, f|_{[0,1]} \text{ polinomios de } 2^\circ \text{ grado} \}$

¿Cuál es su dimensión?  $\rightarrow$  Para hallar su dimensión vamos a ver una base de  $T_2$ .

$$f(x) = \begin{cases} a_1 x^2 + b_1 x + c_1 & x \in [-1, 0] \\ a_2 x^2 + b_2 x + c_2 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$v_1 = \begin{cases} x^2 & x \in [-1, 0] \\ 0 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$v_4 = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 0] \\ x^2 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$v_2 = \begin{cases} x & x \in [-1, 0] \\ 0 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$v_5 = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 0] \\ x & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$v_3 = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 0] \\ 0 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$v_6 = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 0] \\ 1 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

La función  $f(x)$  se puede generar a partir de estos vectores, por combinación lineal. Por tanto, forman una base:

$\rightarrow$  si son linealmente independientes.

$$B = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$$

Para comprobar si son independientes, tomamos una combinación lineal:

$$f \in T_2 \quad f(x) = a_1 v_1(x) + a_2 v_2(x) + a_3 v_3(x) + a_4 v_4(x) + a_5 v_5(x) + a_6 v_6(x)$$

$$f(x) = a_1 v_1(x) + \dots + a_6 v_6(x) = 0 \Rightarrow a_1 = b_1 = \dots = c_2 = 0$$

Para que la combinación lineal sea 0

todos los coeficientes deben valer 0.



SON INDEPENDIENTES

Dimensión de  $T_2$  = Número de elementos  
de su base.

$$\text{Dim } T_2 = 6$$

(a) Sea  $S_2(\Delta)$  subespacio de  $T_2$  formado por  $f \in C^1(-1,1)$

↳ Splines cuadrados en  $\Delta$ .

↳ la función y la  
primera derivada  
continuas.

¿Cuál es la dimensión de  $S_2(\Delta)$ ?

Determinar una base de  $S_2(\Delta)$ .

El único problema de continuidad  
puede ocurrir en  $x=0$   
(por donde se divide el intervalo).  
Vamos a exigir que sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} a_1 x^2 + b_1 x + c_1 & x \in [-1, 0] \\ a_2 x^2 + b_2 x + c_2 & x \in [0, 1] \end{cases} \quad \text{continua en } x=0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2a_1 x + b_1 & x \in [-1, 0] \\ 2a_2 x + b_2 & x \in [0, 1] \end{cases} \quad \text{continua en } x=0$$

Para que  $f(x)$  y  $f'(x)$  sean continuas, vemos que se debe cumplir:

$$\begin{matrix} b_1 = b_2 \\ c_1 = c_2 \end{matrix}$$

→ Hemos añadido 2 condiciones. Es de esperar que, si una condición no depende de la otra, la dimensión se rebaje en 2 unidades. Y efectivamente es lo que ocurre.

$$f(x) = \begin{cases} a_1 x^2 + b x + c & x \in [-1, 0] \\ a_2 x^2 + b x + c & x \in [0, 1] \end{cases}$$

→ Si  $f(x) \in S_2(\Delta)$  tendrá esta forma.

↑ 4 parámetros

$$B_S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$

$$\dim S_2 = 4$$

Dimensión = 4  $\Rightarrow$   $N^2$  elementos de la base. ¡BIEN!

Dimensión = 2  $\Rightarrow$  Son polinomios de grado 2. MAL

Dimensión = 6  $\Rightarrow$  Hay 6 variables. MAL

Los elementos de la base tienen que ser todos de grado no superior a 2, independientes y que generen todo el espacio.

$$w_1(x) = \begin{cases} x^2 & x \in [-1, 0] \\ 0 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$w_2(x) = x \quad x \in [-1, 1]$$

→ La b es igual en ambos intervalos.

$$w_3(x) = 1 \quad x \in [-1, 1]$$

$$w_4(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 0] \\ x^2 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

↓  
Pongo el intervalo entero porque lo que me aporta (la c) es igual en ambos intervalos.

¿Son independientes los vectores  $w$ ? Sí.

$$f(x) = a_1 w_1(x) + b w_2(x) + c w_3(x) + a_2 w_4(x) = 0 \Rightarrow a_1 = b = c = a_2 = 0.$$

Definimos  $S'_2 \subset S_2(\Delta)$   $S'_2 = \{ f \in S_2(\Delta) / f'(-1) = 0 \}$

Determinar su dimensión y calcular su base de Lagrange para el problema de interpolar una función  $f(x)$  en  $\{x_0, x_1, x_2\} = \{-1, 0, 1\}$

Tenemos una  $f \in S_2(\Delta)$  que tendrá la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} a_1 x^2 + b x + c & x \in [-1, 0] \\ a_2 x^2 + b x + c & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Para que  $f \in S'_2(\Delta)$  tiene que cumplir otra condición:

$$f'(x) = \begin{cases} 2a_1 x + b & x \in [-1, 0] \\ 2a_2 x + b & x \in [0, 1] \end{cases} \xrightarrow{\text{Cojo este intervalo porque } -1 \in [-1, 0]} f'(-1) = 0 ; 2a_1(-1) + b = 0 ;$$

$a_1 = \frac{b}{2}$

$$f(x) \in S'_2(\Delta) \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} b \left( \frac{x^2}{2} + x \right) + c & x \in [-1, 0] \\ a_2 x^2 + b x + c & x \in [0, 1] \end{cases}$$

La base de  $S'_2(\Delta)$  estará formada por 3 vectores que me generen todo el espacio.

NÚMERO DE PARÁMETROS = NÚMERO DE VECTORES =  
= DIMENSIÓN DE LA BASE.

$$B' = \{ u_1(x), u_2(x), u_3(x) \}$$

$$u_1(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x & x \in [-1, 0] \\ x & x \in [0, 1] \end{cases}$$

↓  
Aporta b

$$u_3(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-1, 0] \\ x^2 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

↓  
Aporta a<sub>2</sub>

$$u_2(x) = 1 \quad x \in [-1, 1]$$

↓  
Aporta c

$f(x)$  se puede escribir como combinación lineal de los elementos de la base:

$$f(x) = bu_1(x) + cu_2(x) + a_2u_3(x) = \begin{cases} b\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + c & x \in [-1, 0] \\ a_2x + bx + c & x \in [0, 1] \end{cases}$$

¿Cómo es posible que el polinomio valga 0 en todo el intervalo? Si sólo tiene 2 raíces (porque es de grado 2) → Todos los coeficientes tienen que ser 0 → Los vectores  $u(x)$  son independientes.

\* La función  $f$  definida en  $[-1, 1]$ . Queremos interpolar dicha función en  $\{-1, 0, 1\}$  a través de funciones de  $S_2'(\Delta)$ .

↳ Interpolar en este espacio.

Vamos a definir el problema de interpolación:

$$s(x) = \begin{cases} b\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + c & x \in [-1, 0] \\ ax^2 + bx + c & x \in [0, 1] \end{cases}$$

→



Encontrar  $s \in S_2'(\Delta)$  tal que  $s(-1) = f(-1)$   $s(0) = f(0)$   $s(1) = f(1)$

Formas Lineales asociadas a este problema:

$$\left. \begin{array}{l} L_0 : S_2'(\Delta) \rightarrow \mathbb{R} \\ s \rightarrow L_0(s) = s(-1) \\ \\ L_1 : S_2'(\Delta) \rightarrow \mathbb{R} \\ s \rightarrow L_1(s) = s(0) \\ \\ L_2 : S_2'(\Delta) \rightarrow \mathbb{R} \\ s \rightarrow L_2(s) = s(1) \end{array} \right\} s \in S_2'(\Delta) : L_i(f) = f(x_i) \quad \begin{array}{l} i = 0, 1, 2 \\ x_0 = -1 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

$\{v_0, v_1, v_2\}$   $L_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

↳ BASE DE LAGRANGE

\* Hallar  $v_0$ :

$$v_0(x) = \begin{cases} b_0 \left( \frac{x^2}{2} + x \right) + c_0 & x \in [-1, 0] \\ a_0 x^2 + b_0 x + c_0 & x \in [0, 1] \end{cases}$$

Pedimos que se cumplan las condiciones de Lagrange:

$$\left. \begin{array}{l} L_0(v_0) = v_0(-1) = 1 \\ L_1(v_0) = v_0(0) = 0 \\ L_2(v_0) = v_0(1) = 0 \end{array} \right\} \text{Resolvemos el sistema y hallamos } a_0, b_0, c_0.$$

$$\left. \begin{array}{l} v_0(-1) = -\frac{1}{2} \cdot b_0 + c_0 = 1 \\ v_0(0) = c_0 = 0 \\ v_0(1) = a_0 + b_0 + c_0 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_0 = 2 \\ b_0 = -2 \\ c_0 = 0 \end{array}$$

$$v_0(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & x \in [-1, 0] \\ 2x^2 - 2x & x \in [0, 1] \end{cases}$$

\* Hallar  $v_1$  y  $v_2$  de la misma manera.